BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

GIẢI TÍCH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ biên) - VŨ TUẤN (Chủ biên)
LÊ THỊ THIÊN HƯƠNG - NGUYỄN TIẾN TÀI - CẤN VĂN TUẤT

GIẢI TÍCH 12

(*Tái bản lần thứ mười hai*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH

 **Phần hoạt động của học sinh.**

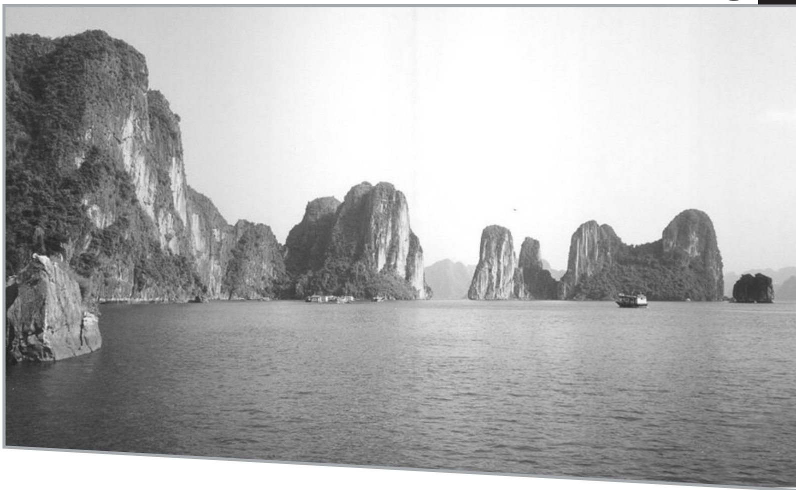
Tuỳ đối tượng cụ thể mà giáo viên sử dụng.

■ **Kết thúc phần chứng minh.**

01 – 2020/CXBIPH/616 – 869/GD

Mã số : CH201T0

Chương I



ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

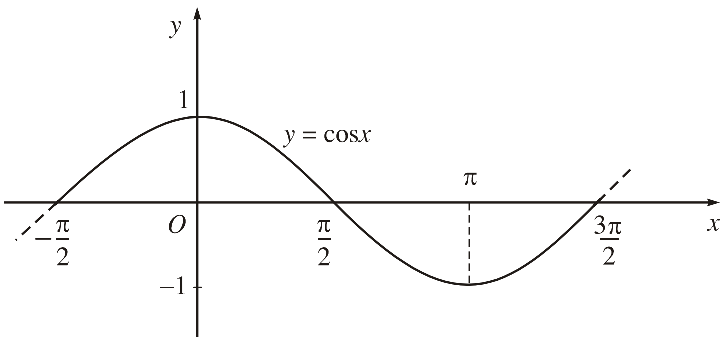
- Đồng biến, nghịch biến
- Cực trị
- Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất
- Tiệm cận
- Khảo sát hàm số

§1 SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

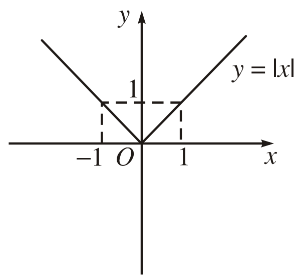
I – TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1

Từ đồ thị (H.1, H.2) hãy chỉ ra các khoảng tăng, giảm của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ và của hàm số $y = |x|$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.



Hình 1



Hình 2

1. Nhắc lại định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K. Ta nói

Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ nhỏ hơn $f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) ;$$

Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên K nếu với mọi cặp x_1, x_2 thuộc K mà x_1 nhỏ hơn x_2 thì $f(x_1)$ lớn hơn $f(x_2)$, tức là

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) .$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số **đơn điệu** trên K.

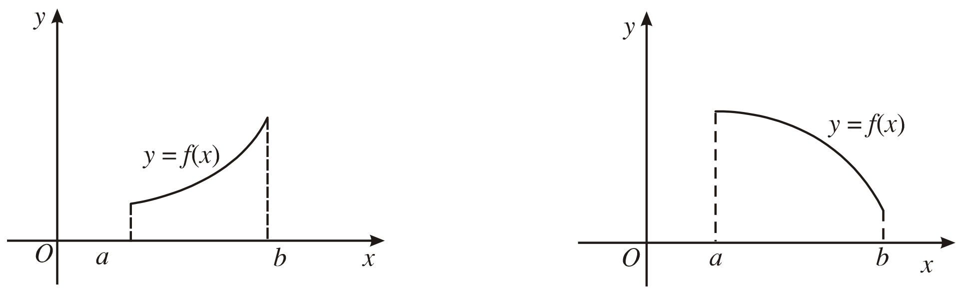
NHẬN XÉT. Từ định nghĩa trên ta thấy

a) $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0,\ \forall x_1, x_2 \in K$ $(x_1 \neq x_2)$;

$f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0,\ \forall x_1, x_2 \in K$ $(x_1 \neq x_2)$.

b) Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (H.3a) ;

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (H.3b).



a) b)

Hình 3

2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

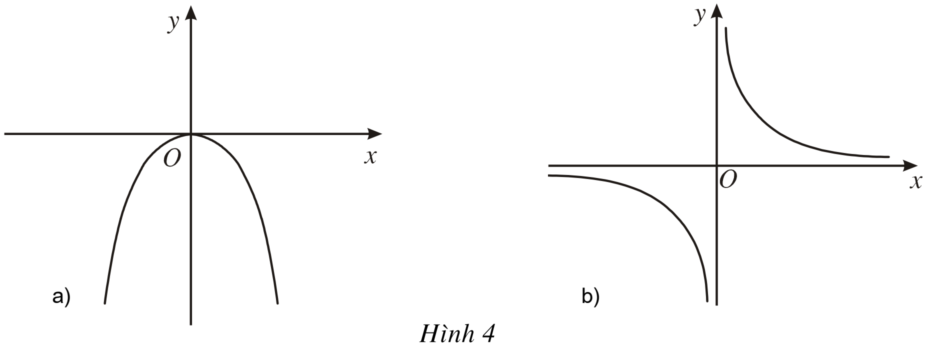
2

Xét các hàm số sau và đồ thị của chúng :

a) $y = -\dfrac{x^2}{2}$ (H.4a) b) $y = \dfrac{1}{x}$ (H.4b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'					
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'			‖		
y	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0



Hình 4

Xét dấu đạo hàm của mỗi hàm số và điền vào bảng tương ứng.
Từ đó hãy nêu nhận xét về mối quan hệ giữa sự đồng biến, nghịch biến của hàm số và dấu của đạo hàm.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

> Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.
> a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
> b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Tóm lại, trên K

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến} \\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến.} \end{cases}$$

CHÚ Ý

Nếu $f'(x) = 0$, $\forall x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K.

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số :

a) $y = 2x^4 + 1$; b) $y = \sin x$ trên khoảng $(0 ; 2\pi)$.

Giải

a) Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 8x^3$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = 2x^4 + 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$, đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

b) Xét trên khoảng $(0 ; 2\pi)$, ta có $y' = \cos x$.

Bảng biến thiên

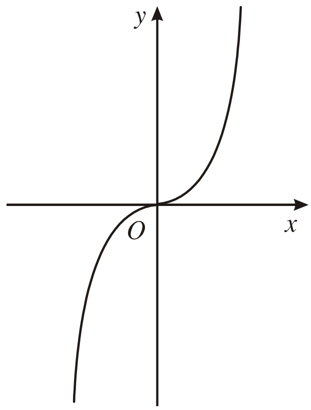
x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y' = \cos x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y = \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Vậy hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên các khoảng $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right)$.

3

Khẳng định ngược lại với định lí trên có đúng không ? Nói cách khác, nếu hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K thì đạo hàm của nó có nhất thiết phải dương (âm) trên đó hay không ?

Chẳng hạn, xét hàm số $y = x^3$ có đồ thị trên Hình 5.



Hình 5

CHÚ Ý

Ta có định lí mở rộng sau đây.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K. Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 7$.

Giải. Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 12x + 6 = 6(x+1)^2$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Theo định lí mở rộng, hàm số đã cho luôn luôn đồng biến.

II – QUY TẮC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Quy tắc

1. Tìm tập xác định.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Áp dụng

Ví dụ 3. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2.$$

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = x^2 - x - 2,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{19}{6}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(2\ ;\ +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1\ ;\ 2)$.

Ví dụ 4. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \neq -1$. Ta có

$$y' = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

y' không xác định tại $x = -1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(-1\ ;\ +\infty)$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $x > \sin x$ trên khoảng $\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng cách xét khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = x - \sin x$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = x - \sin x$ $\left(0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ($f'(x) = 0$ chỉ tại $x = 0$) nên theo chú ý trên ta có $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó, với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ta có $f(x) = x - \sin x > f(0) = 0$

hay $x > \sin x$ trên khoảng $\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập

1. Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số :

a) $y = 4 + 3x - x^2$;

b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 2$;

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

d) $y = -x^3 + x^2 - 5$.

2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số :

a) $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$; b) $y = \dfrac{x^2-2x}{1-x}$;

c) $y = \sqrt{x^2-x-20}$; d) $y = \dfrac{2x}{x^2-9}$.

3. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1 ; 1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(1 ; +\infty)$.

4. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0 ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.

5. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\tan x > x \ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$; b) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3} \ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

BÀI ĐỌC THÊM

TÍNH CHẤT ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

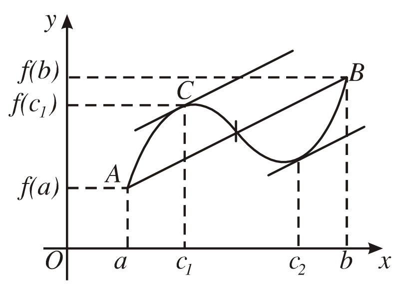
Điều kiện đủ về tính chất đơn điệu của hàm số được chứng minh dựa vào định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ LA-GRĂNG

> Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ thì tồn tại một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho
>
> $$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$
>
> hay $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Minh hoạ hình học :

Nếu hàm số $f(x)$ thoả mãn các giả thiết của định lí La-grăng thì trên đồ thị tồn tại điểm C mà tiếp tuyến tại đó song song hoặc trùng với dây cung AB (H. 6).



Hình 6

HỆ QUẢ

Nếu $F'(x) = 0$ với mọi x thuộc khoảng $(a\ ;\ b)$ thì $F(x)$ bằng hằng số trên khoảng đó.

Chứng minh. Xét điểm cố định $x_0 \in (a\ ;\ b)$. Với mỗi $x \in (a\ ;\ b)$ mà $x \neq x_0$, các giả thiết của định lí La-grăng được thoả mãn trên đoạn $[x_0\ ;\ x]$ (hoặc $[x;\ x_0]$). Do đó tồn tại điểm $c \in (x_0\ ;\ x)$ (hoặc $c \in (x;\ x_0)$) sao cho $F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$. Vì $c \in (a;\ b)$ nên $F'(c) = 0$. Vậy

$$F(x) - F(x_0) = 0 \text{ hay } F(x) = F(x_0) = \text{const}$$

trên toàn khoảng $(a\ ;\ b)$. ■

ĐỊNH LÍ

> Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$.
> a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó ;
> b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chứng minh. Lấy hai điểm bất kì $x_1,\ x_2\ \ (x_1 < x_2)$ trên khoảng $(a\ ;\ b)$. Vì $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[x_1\ ;\ x_2]$ và có đạo hàm trên khoảng $(x_1\ ;\ x_2)$.

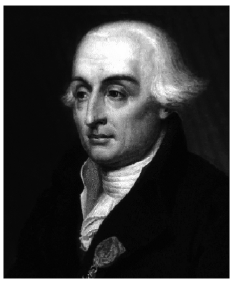
Theo định lí La-grăng, tồn tại một điểm $c \in (x_1\ ;\ x_2) \subset (a;\ b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Từ đó suy ra :

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì $f'(c) > 0$ nên $f(x_2) > f(x_1)$. Do đó, $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì $f'(c) < 0$ nên $f(x_2) < f(x_1)$. Do đó, $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$. ■

BẠN CÓ BIẾT

LA-GRĂNG (J.L. LAGRANGE)



J.L. Lagrange
(1736 – 1813)

La-grăng là nhà toán học Pháp, xuất thân trong một gia đình giàu có, nhưng trở nên khánh kiệt khi ông tưởng như sắp được thừa kế gia sản. Tuy nhiên, về sau ông xem tai hoạ này là một điều may mắn.

Ông nói : "Nếu được thừa kế một tài sản thì chắc là tôi không dành đời mình cho toán học".

Ông nội La-grăng là người Pháp, bà nội là người I-ta-li-a. Cả gia đình ông định cư ở Tu-rin (thủ phủ của xứ Pi-ê-mông (Piémont) thuộc I-ta-li-a).

La-grăng được cử làm giáo sư toán học ở Trường Pháo binh Hoàng gia Tu-rin năm 19 tuổi. Tất cả các học trò đều lớn tuổi hơn ông. Cùng với những học trò ưu tú của mình, La-grăng đã lập ra Hội nghiên cứu, tiền thân của Viện Hàn lâm khoa học Tu-rin. Tập báo cáo đầu tiên của Hội xuất hiện năm 1759 khi ông 23 tuổi. Phần lớn những công trình tốt nhất công bố trong tập san đầu này là của La-grăng, dưới nhiều bút danh khác nhau.

Ở tuổi 23, La-grăng được coi là nhà toán học ngang hàng với những nhà toán học lớn nhất thời bấy giờ là Ơ-le (Euler) và các nhà toán học họ Béc-nu-li (Bernoulli).

Theo lời giới thiệu của Ơ-le, ngày 2-10-1760, khi mới 24 tuổi, La-grăng được bầu làm Viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn lâm khoa học Bec-lin. Về sau, Ơ-le và Đa-lăm-be (d'Alembert) còn vận động vua nước Phổ mời La-grăng sang Béc-lin làm nhà toán học của Triều đình.

Năm 1764, lúc 28 tuổi, La-grăng được giải thưởng lớn về bài toán bình động của Mặt Trăng (là bài toán lí giải vì sao khi chuyển động, Mặt Trăng luôn luôn quay một mặt về phía Trái Đất).

Các năm 1766, 1772, La-grăng liên tiếp nhận được các giải thưởng của Viện Hàn lâm khoa học Pa-ri về các bài toán 6 vật thể, 3 vật thể.

Ngày 6-11-1776, La-grăng được vua nước Phổ - "vị vua lớn nhất châu Âu" - đón tiếp nồng nhiệt và được cử làm Giám đốc Ban Toán Lí của Viện Hàn lâm Bec-lin.

Năm 1787, Hoàng gia và Viện Hàn lâm Pa-ri đón tiếp nồng hậu nhà toán học lớn La-grăng trở về và cấp cho ông một căn hộ đầy đủ tiện nghi trong điện Lu-vrơ (Louvre, nay là viện bảo tàng lớn ở Pa-ri).

Năm 1788, ở tuổi 52, ông công bố kiệt tác của đời ông, bộ "Cơ học giải tích", đề tài mà ông ấp ủ từ lúc 19 tuổi.

Nhờ sự can thiệp của La-grăng, người ta đã không thừa nhận 12 thay cho 10 để làm cơ số cho mét hệ.

Ông lập gia đình hai lần. Bà vợ đầu mất sớm vì đau yếu. Ở tuổi ngoài 50, La-grăng sống cô đơn, sầu muộn. Năm 56 tuổi, ông được một thiếu nữ, con gái bạn ông là nhà thiên văn học Lơ-mô-ni-ê (Lemonier), yêu và ngỏ lời muốn kết hôn với ông. La-grăng nhận lời. Cô đã dành cả cuộc đời trẻ trung, tươi đẹp của mình để chăm sóc ông, kéo ông ra khỏi u sầu, thức tỉnh nơi ông lòng ham sống. Ông yêu tha thiết và cảm thấy khổ sở mỗi khi phải tạm xa bà. Ông khẳng định rằng bà vợ trẻ dịu dàng, tận tuỵ là giải thưởng quý báu nhất trong mọi giải thưởng của đời ông.

La-grăng được toàn thể nhân dân Pháp tôn vinh. Có lần, Ta-lê-grăng (Tallegrand), một vị tướng, đã nói với cha của La-grăng : "Con ông, người con của nhân dân Pháp, sinh ra ở Pi-ê-mông, đã làm vinh dự cho toàn thể nhân loại bởi thiên tài của mình".

La-grăng mất ngày 10-4-1813, thọ 77 tuổi.

§2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

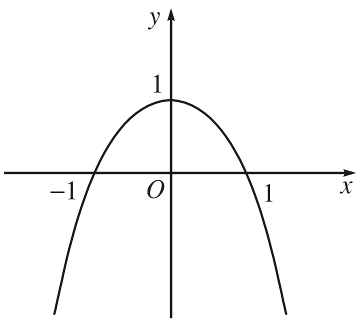
I – KHÁI NIỆM CỰC ĐẠI, CỰC TIỂU

1

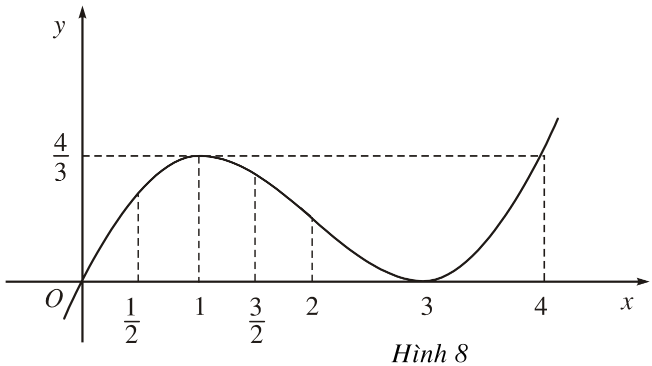
Dựa vào đồ thị (H.7, H.8), hãy chỉ ra các điểm tại đó mỗi hàm số sau có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) :

a) $y = -x^2 + 1$ trong khoảng $(-\infty\,;+\infty)$;

b) $y = \frac{x}{3}(x-3)^2$ trong các khoảng $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{3}{2}\,;\,4\right)$.



Hình 7



Hình 8

Xét dấu đạo hàm của các hàm số đã cho và điền vào các bảng dưới đây.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'					
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'							
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a\,;\,b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a\,;\,b)$.

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h\,;\,x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h\,;\,x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

CHÚ Ý

1. Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của hàm số ; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** (**giá trị cực tiểu**) của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.

2. Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị.** Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại** (**cực tiểu**) và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

3. Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

2

Giả sử $f(x)$ đạt cực đại tại x_0. Hãy chứng minh khẳng định 3 trong chú ý trên bằng cách xét giới hạn tỉ số $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ trong hai trường hợp $\Delta x > 0$ và $\Delta x < 0$.

II – ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ

3

a) Sử dụng đồ thị, hãy xét xem các hàm số sau đây có cực trị hay không.

- $y = -2x + 1$;
- $y = \dfrac{x}{3}(x-3)^2$ (H.8).

b) Nêu mối liên hệ giữa sự tồn tại cực trị và dấu của đạo hàm.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h ; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h ; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 ; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h ; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 ; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	

Ví dụ 1. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^2 + 1$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số và đồ thị của hàm số có một điểm cực đại $(0 ; 1)$ (H.7).

Ví dụ 2. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $\quad y' = 3x^2 - 2x - 1$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{86}{27}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $x = -\frac{1}{3}$ là điểm cực đại, $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số

$$y = \frac{3x+1}{x+1}.$$

Giải. Hàm số xác định tại mọi $x \neq -1$.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị (vì theo khẳng định 3 của Chú ý trên, nếu hàm số có cực trị tại x_0 thì tại đó $y' = 0$).

4

Chứng minh hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$. Hàm số có đạt cực trị tại điểm đó không ?

III – QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

Áp dụng Định lí 1, ta có quy tắc tìm cực trị sau đây.

QUY TẮC I

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

5

Áp dụng quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số

$$f(x) = x(x^2 - 3).$$

Ta thừa nhận định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h ; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó :

a) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu ;

b) Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Áp dụng Định lí 2, ta có quy tắc sau đây để tìm các điểm cực trị của một hàm số.

QUY TẮC II

1. Tìm tập xác định.

2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i ($i = 1, 2, ..., n$) là các nghiệm của nó.

3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6.$$

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2.$

$f''(x) = 3x^2 - 4.$

$f''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow x = -2$ và $x = 2$ là hai điểm cực tiểu ;

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

Kết luận

$f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $x = 2$; $f_{CT} = f(\pm 2) = 2.$

$f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và $f_{CĐ} = f(0) = 6.$

Ví dụ 5. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x) = \sin 2x$.

Giải. Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2\cos 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + l\dfrac{\pi}{2}$ ($l \in \mathbb{Z}$).

$f''(x) = -4\sin 2x.$

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + l\frac{\pi}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\pi\right) = \begin{cases} -4 \text{ nếu } l = 2k \\ 4 \text{ nếu } l = 2k+1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ là các điểm cực đại của hàm số.

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

Bài tập

1. Áp dụng Quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$; b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x + \frac{1}{x}$; d) $y = x^3(1 - x)^2$;

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

2. Áp dụng Quy tắc II, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; b) $y = \sin 2x - x$;

c) $y = \sin x + \cos x$; d) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$.

3. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực tiểu tại điểm đó.

4. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

5. Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

6. Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

§3 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

I – ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

a) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max\limits_{D} f(x)$.

b) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = x - 5 + \frac{1}{x}$$

trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải. Trên khoảng $(0 ; +\infty)$, ta có $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy trên khoảng $(0 ; +\infty)$ hàm số có giá trị cực tiểu duy nhất, đó cũng là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = -3$ (tại $x = 1$). Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên khoảng $(0\,;+\infty)$.

II – CÁCH TÍNH GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

1
Xét tính đồng biến, nghịch biến và tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số :

a) $y = x^2$ trên đoạn $[-3\,;\,0]$;

b) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3\,;\,5]$.

1. Định lí

> Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

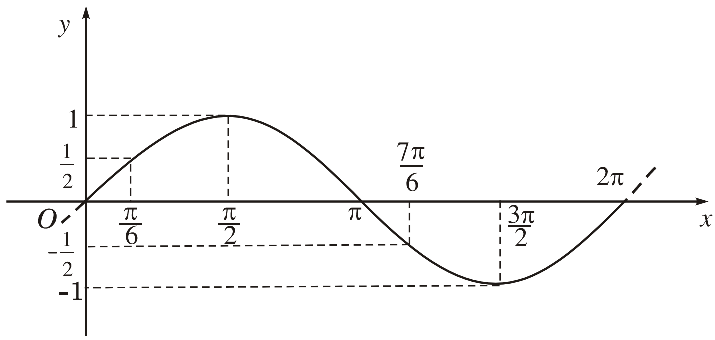
Ta thừa nhận định lí này.

Ví dụ 2. Tính giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x$

a) Trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{7\pi}{6}\right]$;

b) Trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,2\pi\right]$.

Giải



Hình 9

Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (H.9), ta thấy ngay :

a) Trên đoạn $D = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ ta có

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ ;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ ;\ y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Từ đó $\max\limits_{D} y = 1$; $\min\limits_{D} y = -\frac{1}{2}$.

b) Trên đoạn $E = \left[\frac{\pi}{6}; 2\pi\right]$ ta có

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,\ y(2\pi) = 0.$$

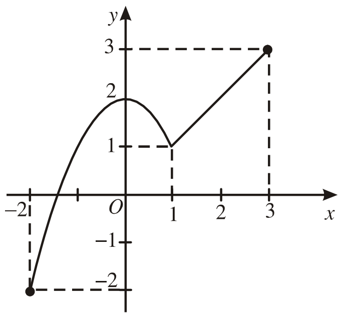
Vậy $\max\limits_{E} y = 1$; $\min\limits_{E} y = -1$.

2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn

2

Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{nếu } -2 \le x \le 1 \\ x & \text{nếu } 1 < x \le 3 \end{cases}$

có đồ thị như Hình 10. Hãy chỉ ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [−2 ; 3] và nêu cách tính.



Hình 10

NHẬN XÉT

Nếu đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a ; b]$ thì hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên cả đoạn. Do đó, $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các đầu mút của đoạn.

Nếu chỉ có một số hữu hạn các điểm x_i ($x_i < x_{i+1}$) mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định thì hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(x_i ; x_{i+1})$. Rõ ràng giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số trên đoạn $[a ; b]$ là số lớn nhất (số nhỏ nhất) trong các giá trị của hàm số tại hai đầu mút a, b và tại các điểm x_i nói trên.

Quy tắc

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ trên khoảng $(a\ ;\ b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

2. Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.

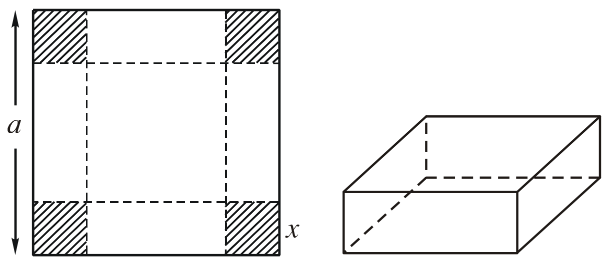
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có

$$M = \max_{[a;\, b]} f(x)\,,\quad m = \min_{[a;\, b]} f(x)\,.$$

CHÚ Ý

Hàm số liên tục trên một khoảng có thể không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0\ ;\ 1)$. Tuy nhiên, cũng có những hàm số có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trên một khoảng như trong Ví dụ 3 dưới đây.

Ví dụ 3. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại như Hình 11 để được một cái hộp không nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất.



Hình 11

Giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt.

Rõ ràng x phải thoả mãn điều kiện $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

Thể tích của khối hộp là

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \qquad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Ta phải tìm $x_0 \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có $\quad V'(x) = (a-2x)^2 + x.2(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x)$.

Trên khoảng $\left(0\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$, ta có

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}.$$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Từ bảng trên ta thấy trong khoảng $\left(0\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$ hàm số có một điểm cực trị duy nhất là điểm cực đại $x = \dfrac{a}{6}$ nên tại đó $V(x)$ có giá trị lớn nhất :

$$\max_{\left(0;\ \frac{a}{2}\right)} V(x) = \frac{2a^3}{27}.$$

3

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định.

Bài tập

1. Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số :

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn $[-4\ ;\ 4]$ và $[0\ ;\ 5]$;

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn [0 ; 3] và [2 ; 5] ;

c) $y = \dfrac{2 - x}{1 - x}$ trên các đoạn [2 ; 4] và [−3 ; −2] ;

d) $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn [−1 ; 1].

2. Trong số các hình chữ nhật cùng có chu vi 16 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

3. Trong tất cả các hình chữ nhật cùng có diện tích 48 m^2, hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

4. Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{4}{1 + x^2}$; b) $y = 4x^3 - 3x^4$.

5. Tính giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

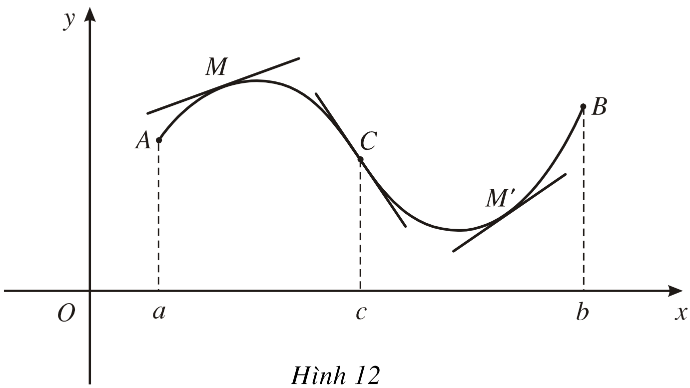
a) $y = |x|$; b) $y = x + \dfrac{4}{x}$ $(x > 0)$.

BÀI ĐỌC THÊM

CUNG LỒI, CUNG LÕM VÀ ĐIỂM UỐN

1. Khái niệm về cung lồi, cung lõm và điểm uốn

Xét đồ thị ACB của hàm số $y = f(x)$ biểu diễn trên Hình 12. Giả sử đồ thị có tiếp tuyến tại mọi điểm.



Hình 12

Tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{AC}$, tiếp tuyến luôn luôn ở phía trên của $\overset{\frown}{AC}$. Ta nói $\overset{\frown}{AC}$ là một **cung lồi**. Nếu a là hoành độ của điểm A, c là hoành độ của điểm C, thì khoảng $(a ; c)$ được gọi là một **khoảng lồi** của đồ thị.

Tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{CB}$, tiếp tuyến luôn luôn ở phía dưới của $\overset{\frown}{CB}$. Ta nói $\overset{\frown}{CB}$ là một **cung lõm**. Kí hiệu b là hoành độ của điểm B thì khoảng $(c ; b)$ được gọi là một **khoảng lõm** của đồ thị.

Điểm phân cách giữa cung lồi và cung lõm được gọi là **điểm uốn** của đồ thị. Trên Hình 12, C là một điểm uốn.

CHÚ Ý

1. Tại điểm uốn, tiếp tuyến đi xuyên qua đồ thị (H.12).
2. Trong một số giáo trình, nhất là giáo trình Giải tích toán học ở Đại học, người ta gọi $\overset{\frown}{AC}$ trên Hình 12 là cung lõm và $\overset{\frown}{CB}$ là cung lồi.

2. Dấu hiệu lồi, lõm và điểm uốn

Ta có hai định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a ; b)$.

Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ thì đồ thị của hàm số lồi trên khoảng đó.

Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ thì đồ thị của hàm số lõm trên khoảng đó.

ĐỊNH LÍ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$. Nếu $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho.

3. Áp dụng

Ví dụ 1. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị các hàm số :

a) $y = x^5$; b) $y = -\sin x$ trên đoạn $[0 ; 2\pi]$.

Giải

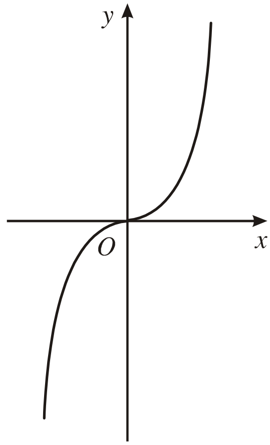
a) Tập xác định : $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$.

Bảng xét dấu y''

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
Đồ thị của hàm số		Lồi	Điểm uốn $O(0\ ;\ 0)$	Lõm	

Vậy đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$, lõm trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$. Điểm $O(0\ ;\ 0)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số (H.13).



Hình 13

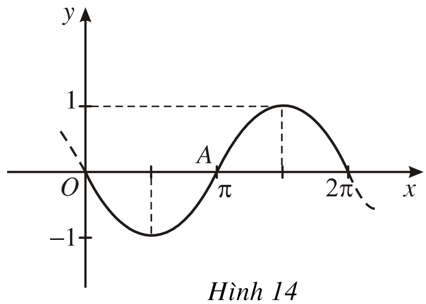
b) Ta có

$$y' = -\cos x, \qquad y'' = \sin x.$$

Bảng xét dấu y''

x	0		π		2π
y''		$+$	0	$-$	
Đồ thị của hàm số		Lõm	Điểm uốn $A(\pi\ ;\ 0)$	Lồi	

Vậy trên đoạn $[0\ ;\ 2\pi)$, đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(0\ ;\ \pi)$, lồi trên khoảng $(\pi\ ;\ 2\pi)$. Điểm $A(\pi\ ;\ 0)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số (H.14).



Hình 14

Ví dụ 2. Tìm các khoảng lồi, lõm của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Giải. Tập xác định : $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$y' = -\frac{2}{(x-1)^2}, \text{ xác định với mọi } x \neq 1\ ;$$

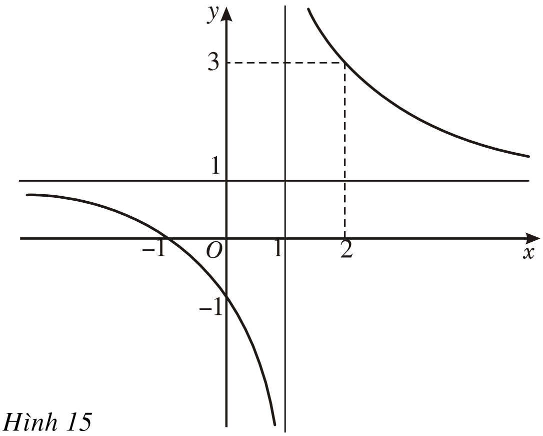
$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}, \text{ xác định với mọi } x \neq 1.$$

Bảng xét dấu y''

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$-$	‖	$+$	
Đồ thị của hàm số		Lồi		Lõm	

Vậy đồ thị của hàm số lồi trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và lõm trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$.

(Đồ thị không có điểm uốn vì hàm số không xác định tại điểm x = 1) (H.15).



Hình 15

§4 ĐƯỜNG TIỆM CẬN

I – ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

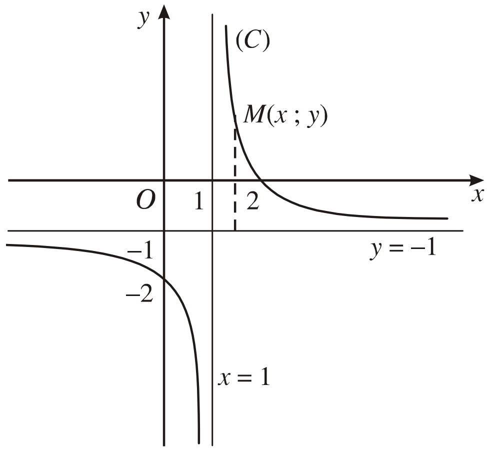
1

Cho hàm số

$$y = \frac{2-x}{x-1} \text{ (H.16).}$$

có đồ thị (C).

Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x\ ;\ y) \in (C)$ tới đường thẳng y = -1 khi $|x| \to +\infty$.



Hình 16

Ví dụ 1. Quan sát đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2 \text{ (H.17).}$$

Nêu nhận xét về khoảng cách từ điểm $M(x\,;\,y) \in (C)$ tới đường thẳng $y = 2$ khi $|x| \to +\infty$ và các giới hạn

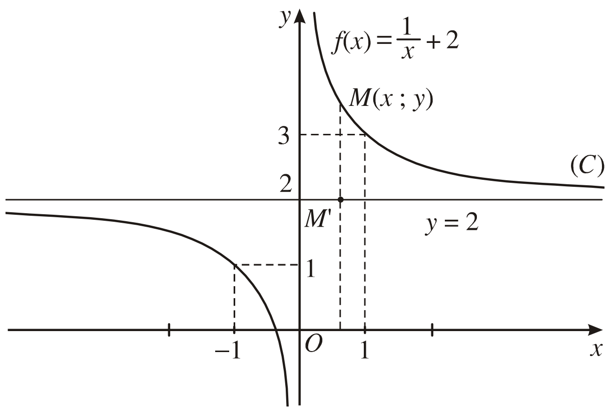
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2],\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)-2].$$

Giải. Kí hiệu M, M' lần lượt là các điểm thuộc (C) và đường thẳng $y = 2$ có cùng hoành độ x (H.17). Khi $|x|$ càng lớn thì các điểm M, M' trên các đồ thị càng gần nhau.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}+2\right)-2\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Tương tự, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2] = 0.$



Hình 17

CHÚ Ý

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, ta viết chung là $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$.

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a\,;+\infty)$, $(-\infty\,;\,b)$ hoặc $(-\infty\,;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

Trong Ví dụ 1, đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đường hypebol $y = \frac{1}{x} + 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

xác định trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$ vì

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) = 1.$$

II – ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

2

Tính $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + 2 \right)$ và nêu nhận xét về khoảng cách MH khi $x \to 0$ (H.17).

ĐỊNH NGHĨA

> Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn
>
> $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,$$
>
> $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

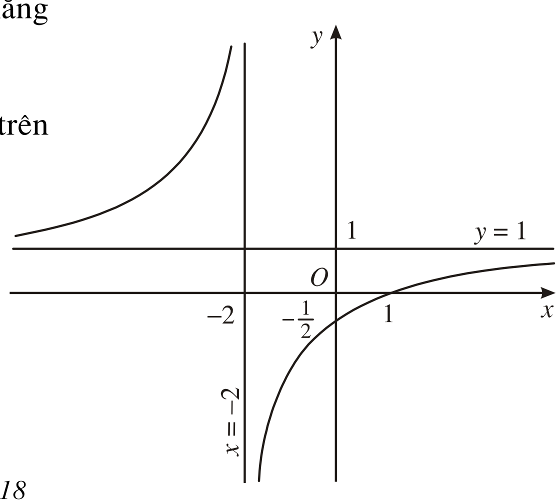
Ví dụ 3. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x - 1}{x + 2}.$$

Giải. Vì $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x - 1}{x + 2} = -\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x - 1}{x + 2} = +\infty$) nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của (C).

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{x+2} = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).

Đồ thị của hàm số được cho trên Hình 18.



Hình 18

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3}$.

Giải. Vì $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3} = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} \dfrac{2x^2 + x + 1}{2x - 3} = -\infty$) nên đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài tập

1. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số :

a) $y = \dfrac{x}{2 - x}$;

b) $y = \dfrac{-x + 7}{x + 1}$;

c) $y = \dfrac{2x - 5}{5x - 2}$;

d) $y = \dfrac{7}{x} - 1$.

2. Tìm các tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số :

a) $y = \dfrac{2 - x}{9 - x^2}$;

b) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{3 - 2x - 5x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$;

d) $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

§5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

I – SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số.

2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên của hàm số :
  - \+ Tính đạo hàm y' ;
  - \+ Tìm các điểm tại đó đạo hàm y' bằng 0 hoặc không xác định ;
  - \+ Xét dấu đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.
- Tìm cực trị.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).
- Lập bảng biến thiên. (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên).

3. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

CHÚ Ý

1. Nếu hàm số tuần hoàn với chu kì T thì chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị trên một chu kì, sau đó tịnh tiến đồ thị song song với trục Ox.

2. Nên tính thêm toạ độ một số điểm, đặc biệt là toạ độ các giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ.

3. Nên lưu ý đến tính chẵn, lẻ của hàm số và tính đối xứng của đồ thị để vẽ cho chính xác.

II – KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM PHÂN THỨC

1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số đã học

$$y = ax + b, \qquad y = ax^2 + bx + c$$

theo sơ đồ trên.

1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải

1) Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)\ ;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Trên các khoảng $(-\infty\ ; -2)$ và $(0\ ; +\infty)$, y' dương nên hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(-2\ ; 0)$, y' âm nên hàm số nghịch biến.

• Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; $y_{CĐ} = y(-2) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{CT} = y(0) = -4$.

• Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3) Đồ thị

Ta có $x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2 = 0$

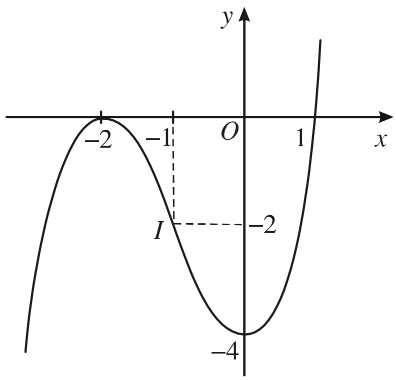
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Vậy $(-2 ; 0)$ và $(1 ; 0)$ là các giao điểm của đồ thị với trục Ox.

Vì $y(0) = -4$ nên $(0 ; -4)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy. Điểm đó cũng là điểm cực tiểu của đồ thị.

Đồ thị của hàm số được cho trên Hình 19.

Lưu ý. Đồ thị của hàm số bậc ba đã cho có tâm đối xứng là điểm I $(-1 ; -2)$ (H.19). Hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.



Hình 19

2

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Nêu nhận xét về đồ thị của hàm số này với đồ thị của hàm số khảo sát trong Ví dụ 1.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Giải

1) Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

Vì $y' = -3x^2 + 6x - 4 = -3(x-1)^2 - 1 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$,

nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

• Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left[-x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left[-x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)\right] = +\infty.$$

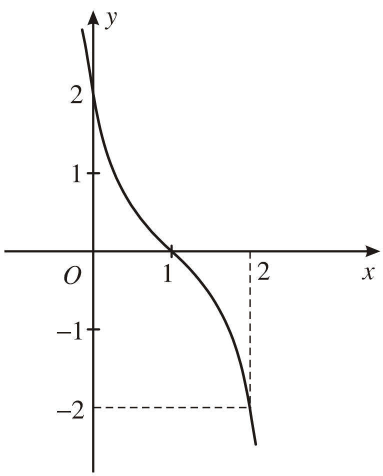
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3) Đồ thị

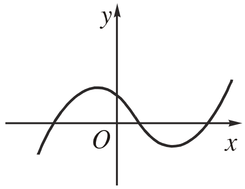
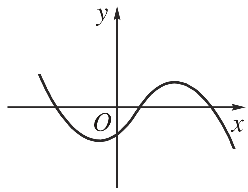
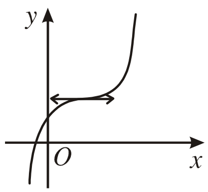
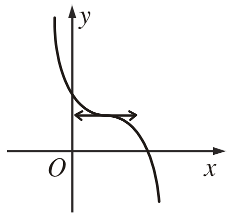
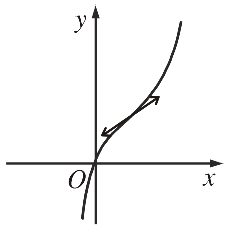
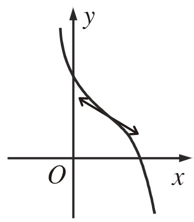
Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại điểm $(1\ ;\ 0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0\ ;\ 2)$.

Đồ thị của hàm số được cho trên Hình 20.



Hình 20

Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

3

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$.

2. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)\ ;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Trên các khoảng $(-1\ ;\ 0)$ và $(1\ ;\ +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(0\ ;\ 1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

• Cực trị

Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x = -1$ và $x = 1$; $y_{CT} = y(\pm 1) = -4$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $y_{CĐ} = y(0) = -3$.

• Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị

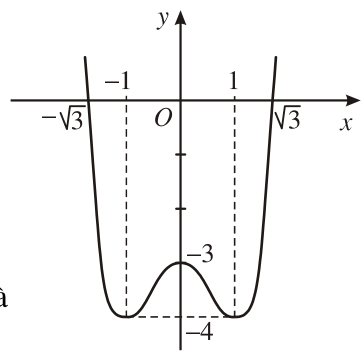
Hàm số đã cho là hàm số chẵn, vì

$y(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3$

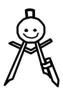
$\quad = x^4 - 2x^2 - 3 = y(x)$.

Do đó, đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ và $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$, cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ -3)$ (H. 21).



Hình 21



4

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Bằng đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 = m$.

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}.$$

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = -2x^3 - 2x = -2x(x^2 + 1) \text{ ; } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Trên khoảng $(-\infty \text{ ; } 0)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(0 \text{ ; } +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

• Cực trị

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = y(0) = \frac{3}{2}$.

Hàm số không có điểm cực tiểu.

• Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left[-x^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4} \right) \right] = -\infty.$$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị

Hàm số đã cho là hàm số chẵn vì

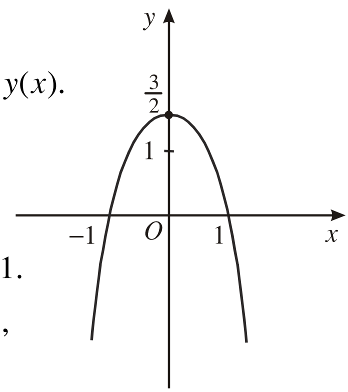
$$y(-x) = -\frac{(-x)^4}{2} - (-x)^2 + \frac{3}{2} = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2} = y(x).$$

Do đó, đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Mặt khác, $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 - 2x^2 + 3 = 0$

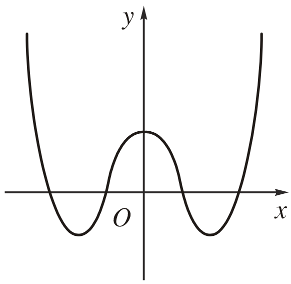
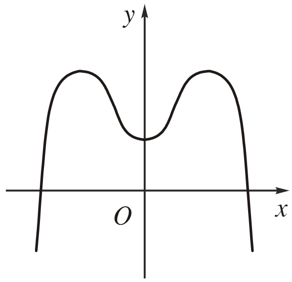
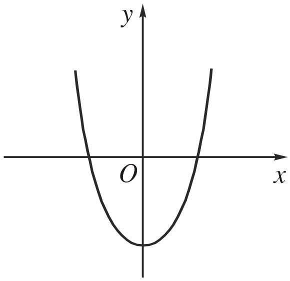
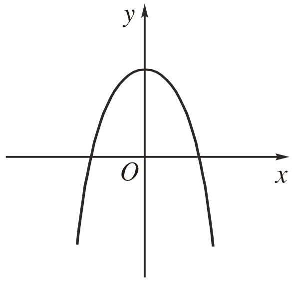
$$\Leftrightarrow -(x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Đồ thị cắt trục hoành tại các điểm $(-1 \text{ ; } 0)$ và $(1 \text{ ; } 0)$, cắt trục tung tại điểm $\left(0 \text{ ; } \frac{3}{2}\right)$ (H. 22).



Hình 22

Dạng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có một nghiệm		

5

Lấy một ví dụ về hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ sao cho phương trình $y' = 0$ chỉ có một nghiệm.

3. Hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

Ví dụ 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-x + 2}{x + 1}$.

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên $y' = \dfrac{-(x + 1) - (-x + 2)}{(x + 1)^2} = \dfrac{-3}{(x + 1)^2}$;

y' không xác định khi $x = -1$; y' luôn luôn âm với mọi $x \neq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(-1\ ;\ +\infty)$.

• Cực trị

Hàm số đã cho không có cực trị.

• Tiệm cận $\lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-x+2}{x+1} = -\infty$;

$$\lim_{x\to -1^+} y = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x+2}{x+1} = +\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to \pm\infty} y = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-x+2}{x+1} = -1.$$

Vậy đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang.

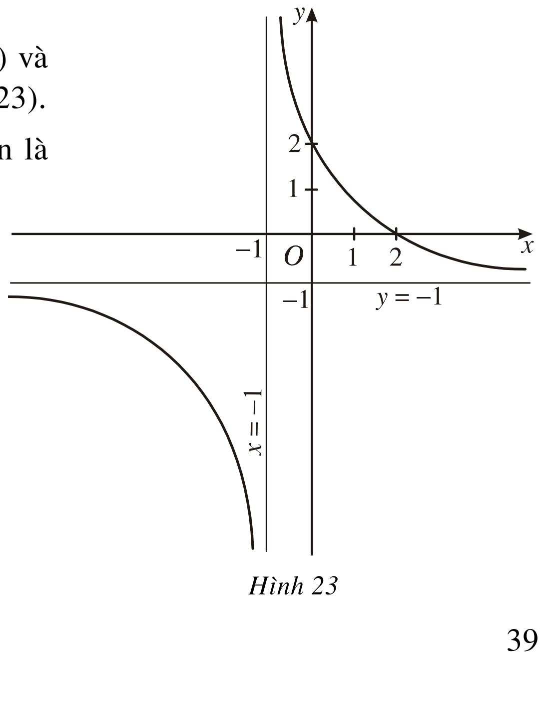
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

3. Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0\ ;\ 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $(2\ ;\ 0)$ (H. 23).

Lưu ý. Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.



Hình 23

__Ví dụ 6.__ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x-2}{2x+1}.$$

Giải

1. Tập xác định : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2. Sự biến thiên

• Chiều biến thiên

$$y' = \frac{2x+1-2(x-2)}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}\ ;$$

y' không xác định khi $x = -\frac{1}{2}$;

y' luôn luôn dương với mọi $x \neq -\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}\ ; +\infty\right)$.

• Cực trị

Hàm số đã cho không có cực trị.

• Tiệm cận

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x-2}{2x+1} = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x-2}{2x+1} = -\infty.$$

Do đó, đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-2}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

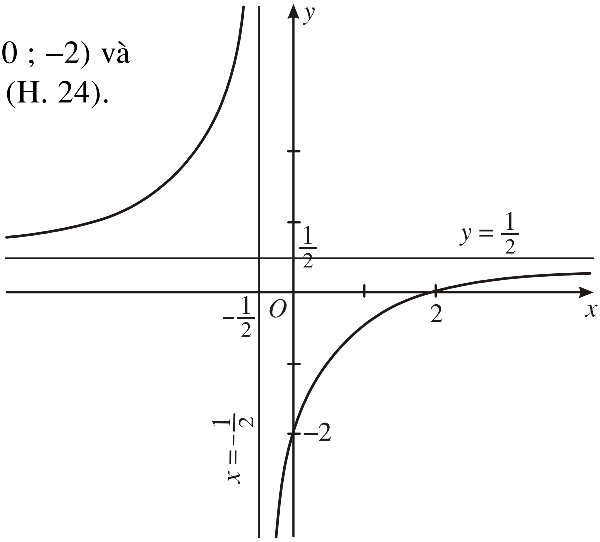
Vậy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

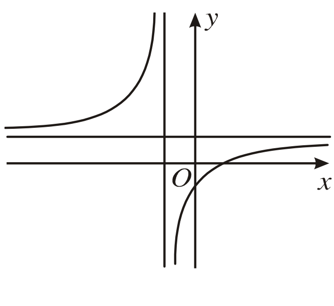
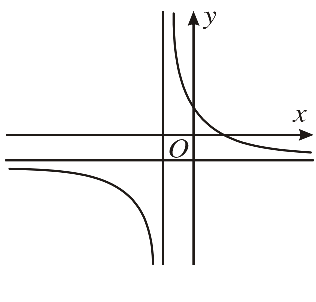
3. Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0 ; −2) và cắt trục hoành tại điểm (2 ; 0) (H. 24).



Hình 24

Dạng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

III – SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ

6
Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị hai hàm số

$$y = x^2 + 2x - 3,$$
$$y = -x^2 - x + 2.$$

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2). Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2), ta phải giải phương trình $f(x) = g(x)$. Giả sử phương trình trên có các nghiệm là x_0, x_1, ... Khi đó, các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $M_0(x_0\,; f(x_0))$, $M_1(x_1\,; f(x_1))$, ...

Ví dụ 7. Chứng minh rằng đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

luôn luôn cắt đường thẳng (d) : $y = m - x$ với mọi giá trị của m.

Giải. (C) luôn cắt (d) nếu phương trình

$$\frac{x-1}{x+1} = m - x \qquad (1)$$

có nghiệm với mọi m.

Ta có

$$\frac{x-1}{x+1} = m - x \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = (x+1)(m-x) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2-m)x - m - 1 = 0 \\ x \neq -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Xét phương trình (2), ta có $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi giá trị của m và $x = -1$ không thoả mãn (2) nên phương trình luôn có hai nghiệm khác -1. Vậy (C) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm.

Ví dụ 8

a) Vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 - 2.$$

b) Sử dụng đồ thị, biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 2 = m. \qquad (3)$$

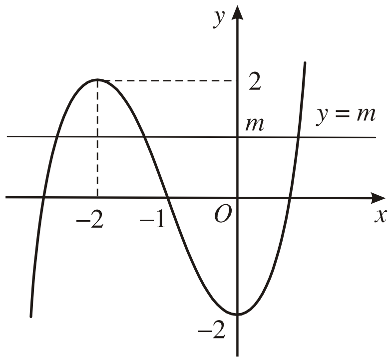
Giải

a) $y' = 3x^2 + 6x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2.$

Đồ thị có điểm cực đại là $(-2 ; 2)$ và điểm cực tiểu là $(0 ; -2)$.

Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ được biểu diễn trên Hình 25.



Hình 25

b) Số nghiệm của phương trình (3) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta suy ra kết quả biện luận về số nghiệm của phương trình (3).

$m > 2$: Phương trình (3) có một nghiệm.

$m = 2$: Phương trình (3) có hai nghiệm.

$-2 < m < 2$: Phương trình (3) có ba nghiệm.

$m = -2$: Phương trình (3) có hai nghiệm.

$m < -2$: Phương trình (3) có một nghiệm.

Bài tập

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau :

a) $y = 2 + 3x - x^3$; b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$;

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$; d) $y = -2x^3 + 5$.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau :

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$; b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

c) $y = \dfrac{1}{2}x^4 + x^2 - \dfrac{3}{2}$; d) $y = -2x^2 - x^4 + 3$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số phân thức :

a) $y = \dfrac{x + 3}{x - 1}$; b) $y = \dfrac{1 - 2x}{2x - 4}$; c) $y = \dfrac{-x + 2}{2x + 1}$.

4. Bằng cách khảo sát hàm số, hãy tìm số nghiệm của các phương trình sau :

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$; b) $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$; c) $2x^2 - x^4 = -1$.

5. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = -x^3 + 3x + 1.$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m

$$x^3 - 3x + m = 0.$$

6. Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua $A(-1 ; \sqrt{2})$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

7. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + m$.

a) Với giá trị nào của tham số m, đồ thị của hàm số đi qua điểm $(-1 ; 1)$?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{7}{4}$.

8. Cho hàm số

$$y = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m \quad (m \text{ là tham số})$$

có đồ thị là (C_m).

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$.

b) Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại $x = -2$.

9. Cho hàm số

$$y = \frac{(m + 1)x - 2m + 1}{x - 1} \quad (m \text{ là tham số})$$

có đồ thị là (G).

a) Xác định m để đồ thị (G) đi qua điểm $(0 ; -1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

Ôn tập chương I

1. Phát biểu các điều kiện để hàm số đồng biến, nghịch biến. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số

$$y = -x^3 + 2x^2 - x - 7,$$

$$y = \frac{x-5}{1-x}.$$

2. Nêu cách tìm cực đại, cực tiểu của hàm số nhờ đạo hàm. Tìm các cực trị của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 + 2.$$

3. Nêu cách tìm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Áp dụng để tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x+3}{2-x}.$$

4. Nhắc lại sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

5. Cho hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Xác định m để hàm số :

i) Đồng biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$;

ii) Có cực trị trên khoảng $(-1 ; +\infty)$.

c) Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt với mọi m.

6. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2.$$

b) Giải bất phương trình $f'(x-1) > 0$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $f''(x_0) = -6$.

7. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 + 1.$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m

$$x^3 + 3x^2 + 1 = \frac{m}{2}\cdot$$

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C).

8. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1 \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Xác định m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

b) Với giá trị nào của tham số m, hàm số có một cực đại và một cực tiểu ?

c) Xác định m để $f''(x) > 6x$.

9. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}\cdot$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

c) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x^4 - 6x^2 + 3 = m$.

10. Cho hàm số

$$y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 \ (m \text{ là tham số})$$

có đồ thị là (C_m).

a) Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

b) Với giá trị nào của m thì (C_m) cắt trục hoành ?

c) Xác định m để (C_m) có cực đại, cực tiểu.

11. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x+3}{x+1}\cdot$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N.

c) Xác định m sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.

d) Tiếp tuyến tại một điểm S bất kì của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại P và Q. Chứng minh rằng S là trung điểm của PQ.

12. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6.$

a) Giải phương trình $f'(\sin x) = 0.$

b) Giải phương trình $f''(\cos x) = 0.$

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0.$

Bài tập trắc nghiệm

Chọn khẳng định đúng trong các bài sau đây.

1. Số điểm cực trị của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x + 7$ là :

(A) 1 ; (B) 0 ; (C) 3 ; (D) 2.

2. Số điểm cực đại của hàm số $y = x^4 + 100$ là :

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) 3.

3. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{1+x}$ là :

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 0.

4. Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên :

(A) $\mathbb{R}$; (B) $(-\infty ; 3)$; (C) $(-3 ; +\infty)$; (D) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

5. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

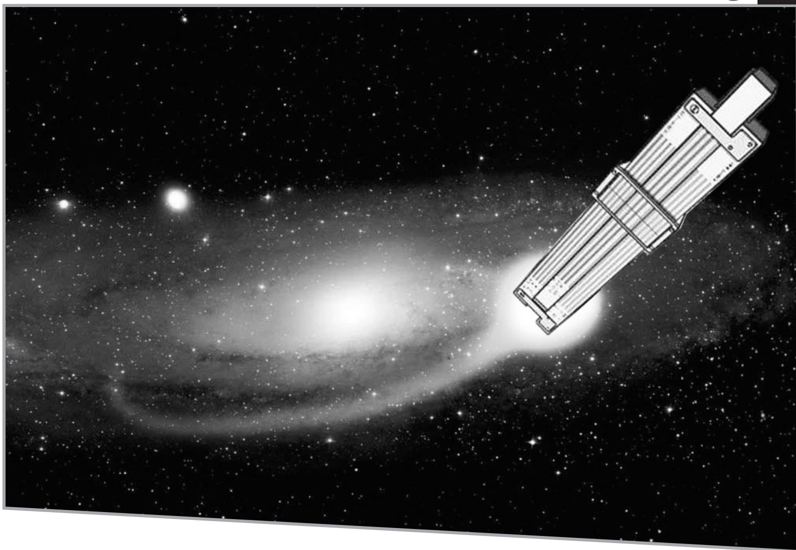
(A) Song song với đường thẳng $x = 1$;

(B) Song song với trục hoành ;

(C) Có hệ số góc dương ;

(D) Có hệ số góc bằng -1.

Chương **II**



HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1 LUỸ THỪA

I – KHÁI NIỆM LUỸ THỪA

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

1

Tính $(1,5)^4$; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$; $(\sqrt{3})^5$.

> Cho n là một số nguyên dương.
>
> Với a là số thực tuỳ ý, **luỹ thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a
>
> $$\boxed{a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n \text{ thừa số}}}$$
>
> Với $a \neq 0$
>
> $$\boxed{\begin{aligned} &a^0 = 1, \\ &a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \end{aligned}}$$

Trong biểu thức a^m, ta gọi a là **cơ số**, số nguyên m là **số mũ**.

CHÚ Ý.

0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10}.27^{-3} + (0,2)^{-4}.25^{-2} + 128^{-1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{-9}.$$

Giải. $A = 3^{10}.\dfrac{1}{27^3} + \dfrac{1}{0,2^4}.\dfrac{1}{25^2} + \dfrac{1}{128}.2^9 = 3 + 1 + 4 = 8.$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$B = \left[\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right].\frac{a^{-3}}{1-a^{-2}} \qquad (a \neq 0,\ a \neq \pm 1).$$

Giải. Với $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, ta có

$$B = \left[a\sqrt{2}(1 + a^2) - 2\sqrt{2}a\right] \cdot \frac{1}{a^3(1 - a^{-2})}$$

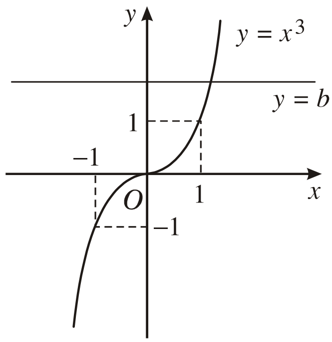
$$= \left(a\sqrt{2} + a^3\sqrt{2} - 2a\sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{a^3 - a}$$

$$= a\sqrt{2}(a^2 - 1) \cdot \frac{1}{a(a^2 - 1)} = \sqrt{2}.$$

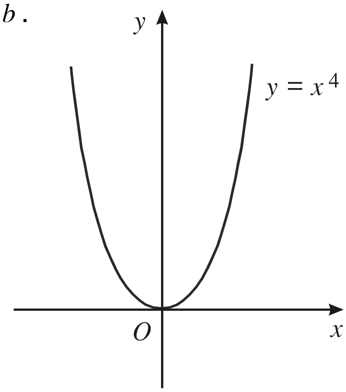
2. Phương trình $x^n = b$

2

Dựa vào đồ thị của các hàm số $y = x^3$ và $y = x^4$ (H.26, H.27), hãy biện luận theo b số nghiệm của các phương trình $x^3 = b$ và $x^4 = b$.



Hình 26



Hình 27

Đồ thị của hàm số $y = x^{2k+1}$ có dạng tương tự đồ thị hàm số $y = x^3$ và đồ thị hàm số $y = x^{2k}$ có dạng tương tự đồ thị hàm số $y = x^4$. Từ đó ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ như sau :

a) Trường hợp n lẻ :

Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Trường hợp n chẵn :

Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm ;

Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$;

Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau.

3. Căn bậc *n*

Cho số nguyên dương n, phương trình

$$a^n = b$$

đưa đến hai bài toán ngược nhau :

- Biết a, tính b.
- Biết b, tính a.

Bài toán thứ nhất là tính luỹ thừa của một số. Bài toán thứ hai dẫn đến khái niệm lấy căn của một số.

a) Khái niệm

> Cho số thực b và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số a được gọi là **căn bậc *n*** của số b nếu $a^n = b$.

Chẳng hạn, 2 và -2 là các căn bậc 4 của 16 ; $-\frac{1}{3}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{243}$.

Từ định nghĩa và kết quả biện luận về số nghiệm của phương trình $x^n = b$, ta có :

Với n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$.

Với n chẵn và
- $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b ;
- $b = 0$: Có một căn bậc n của b là số 0 ;
- $b > 0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

b) Tính chất của căn bậc *n*

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \;;$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \;;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \;;$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a|, & \text{khi } n \text{ chẵn ;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

3

Chứng minh tính chất $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức :

a) $\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{-8}$;   b) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

b) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{3}$.

4. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

> Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luỹ thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi
>
> $$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ .}$$

Ví dụ 4. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$; $4^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{4^{-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{4^3}} = \dfrac{1}{8}$;

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a > 0,\ n \geq 2).$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức

$$D = \frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} \ \ (x, y > 0)\ .$$

Giải. Với x và y là những số dương, theo định nghĩa, ta có

$$D = \frac{xy\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} = xy.$$

5. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Ở lớp dưới, ta đã biết số $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ được biểu diễn dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn :

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562...$$

Gọi r_n là số hữu tỉ thành lập từ n chữ số đầu tiên dùng để viết $\sqrt{2}$ ở dạng thập phân, $n = 1, 2, ..., 10$.

Sử dụng máy tính, ta tính được 3^{r_n} tương ứng. Ta có bảng ghi các dãy số (r_n) và (3^{r_n}) với $n = 1, 2, ..., 10$ như sau :

n	r_n	3^{r_n}
1	1	3
2	1,4	4,655 536 722
3	1,41	4,706 965 002
4	1,414	4,727 695 035
5	1,4142	4,728 733 93
6	1,414 21	4,728 785 881
7	1,414 213	4,728 801 466
8	1,414 213 5	4,728 804 064
9	1,414 213 56	4,728 804 376
10	1,414 213 562	4,728 804 386

Người ta chứng minh được rằng khi $n \to +\infty$ thì dãy số (3^{r_n}) dần đến một giới hạn mà ta gọi là $3^{\sqrt{2}}$.

Sử dụng máy tính bỏ túi (có mười chữ số thập phân), ta có

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}728\ 804\ 388.$$

Cho a là một số dương, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ (r_n) có giới hạn là α và dãy số tương ứng (a^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (r_n).

> Ta gọi giới hạn của dãy số (a^{r_n}) là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^{α}.
>
> $$a^{\alpha} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n\to+\infty} r_n.$$

Chú ý. Từ định nghĩa, ta có $1^{\alpha} = 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

II – TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

4

Hãy nhắc lại các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Luỹ thừa với số mũ thực có các tính chất tương tự luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Cho a, b là những số thực dương ; α, β là những số thực tuỳ ý. Khi đó, ta có :

$$a^{\alpha}.\, a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} \;;$$

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} \;;$$

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta} \;;$$

$$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha} \;;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} \;;$$

Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

Nếu $a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta}$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức

$$E = \frac{a^{\sqrt{7}+1}.\, a^{2-\sqrt{7}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}} \qquad (a > 0).$$

Giải. Với $a > 0$, ta có

$$E = \frac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$$

5

Rút gọn biểu thức $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}\,.\,a^{4-\sqrt{5}}}$ $(a > 0)$.

Ví dụ 7. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $5^{2\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{2}}$.

Giải. Ta có $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Do $12 < 18$ nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Vì cơ số 5 lớn hơn 1 nên $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$.

6

So sánh các số $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ và $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}$.

Bài tập

1. Tính :

a) $9^{\frac{2}{5}}.27^{\frac{2}{5}}$;

b) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$;

c) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}}$;

d) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$.

2. Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ :

a) $a^{\frac{1}{3}}.\sqrt{a}$;

b) $b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{b}$;

c) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

d) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$.

3. Viết các số sau theo thứ tự tăng dần :

a) $1^{3,75}$; 2^{-1} ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

b) 98^{0}; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; $32^{\frac{1}{5}}$.

4. Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$;

b) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^{4}}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;

c) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{b^{2}}}$;

d) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

5. Chứng minh rằng :

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$;

b) $7^{6\sqrt{3}}>7^{3\sqrt{6}}$.

§2 HÀM SỐ LUỸ THỪA

I – KHÁI NIỆM

Ta đã biết các hàm số $y=x^{n}$ $(n\in\mathbb{N}^{*})$, $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $(x>0)$.

Bây giờ, ta xét hàm số $y=x^{\alpha}$ với α là số thực cho trước.

Hàm số $y=x^{\alpha}$, với $\alpha\in\mathbb{R}$, được gọi là **hàm số luỹ thừa**.

Chẳng hạn, các hàm số $y=x$, $y=x^{2}$, $y=\frac{1}{x^{4}}$, $y=x^{\frac{1}{3}}$, $y=x^{\sqrt{2}}$, $y=x^{\pi}$ là những hàm số luỹ thừa.

1 Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ đồ thị của các hàm số sau và nêu nhận xét về tập xác định của chúng : $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-1}$.

CHÚ Ý

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể,

Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;

Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

Với α không nguyên, tập xác định là $(0 ; +\infty)$.

II – ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

Ở lớp 11, ta đã biết đạo hàm của các hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ và $y = \sqrt{x}$ là

$$(x^n)' = nx^{n-1} \ (x \in \mathbb{R});$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ hay } \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \ (x > 0).$$

Một cách tổng quát, người ta chứng minh được hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

Ví dụ 1

a) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} \ (x > 0)$; b) $\left(x^{\sqrt{3}}\right)' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1} \ (x > 0)$.

2 Tính đạo hàm của các hàm số :

$$y = x^{-\frac{2}{3}}, \quad y = x^{\pi}, \quad y = x^{\sqrt{2}}.$$

CHÚ Ý

Công thức tính đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số luỹ thừa có dạng

$$\boxed{(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}.u'.}$$

Ví dụ 2

$$\left((2x^2+x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(2x^2+x-1)^{-\frac{1}{3}}(2x^2+x-1)'$$

$$= \frac{2(4x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+x-1}}.$$

3

Tính đạo hàm của hàm số $y = (3x^2-1)^{-\sqrt{2}}$.

III – KHẢO SÁT HÀM SỐ LUỸ THỪA $y = x^{\alpha}$

Tập xác định của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0 ; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^{\alpha}$ trên khoảng này (gọi là **tập khảo sát**).

$y = x^{\alpha},\ \alpha > 0$	$y = x^{\alpha},\ \alpha < 0$
1. Tập khảo sát : $(0 ; +\infty)$.	1. Tập khảo sát : $(0 ; +\infty)$.
2. Sự biến thiên	2. Sự biến thiên
$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \quad \forall x > 0.$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt :	Giới hạn đặc biệt :
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty.$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0.$
Tiệm cận : Không có.	Tiệm cận :
	Trục Ox là tiệm cận ngang,
	Trục Oy là tiệm cận đứng của đồ thị.

3. Bảng biến thiên

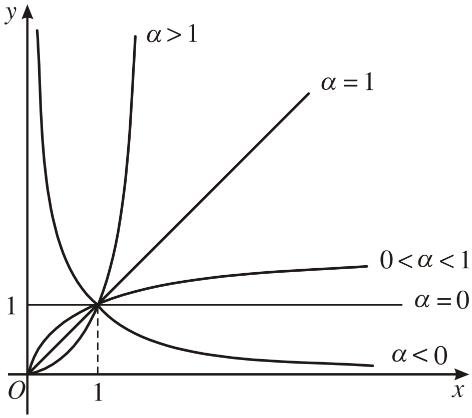
x	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	0 ↗	$+\infty$

4. Đồ thị (H. 28 với $\alpha > 0$).

3. Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'	$-$	
y	$+\infty$ ↘	0

4. Đồ thị (H. 28 với $\alpha < 0$).



Hình 28

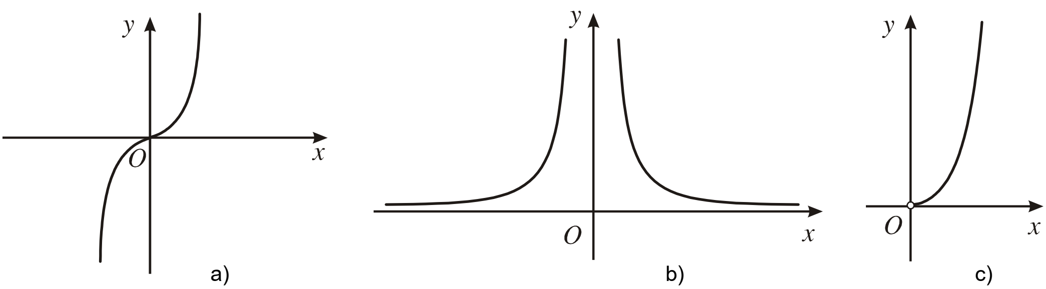
Đồ thị của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm (1 ; 1).

Trên Hình 28 là đồ thị của hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α.

CHÚ Ý

Khi khảo sát hàm số luỹ thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Dưới đây là dạng đồ thị của ba hàm số : $y = x^3$ (H. 29a), $y = x^{-2}$ (H. 29b), $y = x^{\pi}$ (H. 29c).



Hình 29

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^{-\frac{3}{4}}$.

1. Tập xác định : $D = (0 ; +\infty)$.

2. Sự biến thiên

Chiều biến thiên : $y' = -\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$.

Ta có $y' < 0$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nên hàm số đã cho nghịch biến.

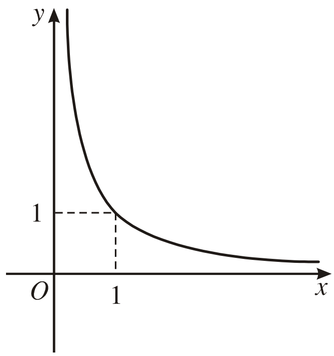
Tiệm cận : $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$.

Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành và có tiệm cận đứng là trục tung.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

3. Đồ thị (H.30).



Hình 30

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến.	Hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Không có.	Tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $(1 ; 1)$.	

Bài tập

1. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = (1 - x)^{-\frac{1}{3}}$;

b) $y = (2 - x^2)^{\frac{3}{5}}$;

c) $y = (x^2 - 1)^{-2}$;

d) $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$.

2. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$; b) $y = (4 - x - x^2)^{\frac{1}{4}}$;

c) $y = (3x + 1)^{\frac{\pi}{2}}$; d) $y = (5 - x)^{\sqrt{3}}$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$; b) $y = x^{-3}$.

4. Hãy so sánh các số sau với 1 :

a) $(4{,}1)^{2{,}7}$; b) $(0{,}2)^{0{,}3}$;

c) $(0{,}7)^{3{,}2}$; d) $(\sqrt{3})^{0{,}4}$.

5. Hãy so sánh các cặp số sau :

a) $(3{,}1)^{7{,}2}$ và $(4{,}3)^{7{,}2}$; b) $\left(\frac{10}{11}\right)^{2{,}3}$ và $\left(\frac{12}{11}\right)^{2{,}3}$; c) $(0{,}3)^{0{,}3}$ và $(0{,}2)^{0{,}3}$;

§3 LÔGARIT

I – KHÁI NIỆM LÔGARIT

1
Tìm x để :

a) $2^x = 8$; b) $2^x = \frac{1}{4}$; c) $3^x = 81$; d) $5^x = \frac{1}{125}$.

Cho số a dương, phương trình

$$a^{\alpha} = b$$

đưa đến hai bài toán ngược nhau :

• Biết α , tính b.

• Biết b , tính α.

Bài toán thứ nhất là tính luỹ thừa với số mũ thực của một số. Bài toán thứ hai dẫn đến khái niệm lấy lôgarit của một số. Người ta chứng minh được rằng với hai số dương $a, b, a \neq 1$, luôn tồn tại duy nhất số α sao cho $a^{\alpha} = b$.

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là **lôgarit cơ số *a* của *b*** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.}$$

Ví dụ 1

a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ vì $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9.$

2

a) Tính $\log_{\frac{1}{2}} 4,\ \log_3 \frac{1}{27}$.

b) Có các số x, y nào để $3^x = 0,\ 2^y = -3$ hay không ?

CHÚ Ý

Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Tính chất

Cho hai số dương a và b, $a \neq 1$. Ta có các tính chất sau đây.

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a 1 = 0,\ \ \log_a a = 1, \\ a^{\log_a b} = b,\ \log_a(a^{\alpha}) = \alpha. \end{array}}$$

3

Hãy chứng minh các tính chất trên.

Ví dụ 2

a) $3^{2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25.$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3.$

4

Tính $4^{\log_2 \frac{1}{7}}, \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$.

II – QUY TẮC TÍNH LÔGARIT

5

Cho $b_1 = 2^3, \ b_2 = 2^5$.

Tính $\log_2 b_1 + \log_2 b_2$; $\log_2(b_1 b_2)$ và so sánh các kết quả.

1. Lôgarit của một tích

ĐỊNH LÍ 1

> Cho ba số dương $a, \ b_1, b_2$ với $a \neq 1$, ta có
>
> $$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 .$$

Lôgarit của một tích bằng tổng các lôgarit.

Chứng minh. Đặt $\alpha_1 = \log_a b_1, \ \alpha_2 = \log_a b_2$, ta có

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2 . \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $b_1 = a^{\alpha_1}, \ b_2 = a^{\alpha_2}$, suy ra $b_1 b_2 = a^{\alpha_1}.a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Do đó $$\alpha_1 + \alpha_2 = \log_a(b_1 b_2). \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$ ■

Ví dụ 3. Tính $\log_6 9 + \log_6 4$.

Giải. $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9.4) = \log_6 36 = 2$.

CHÚ Ý

Định lí 1 có thể mở rộng cho tích của n số dương :

$$\log_a(b_1 b_2 ... b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + ... + \log_a b_n$$

$$(a, b_1, b_2, ..., b_n > 0, a \neq 1).$$

6

Tính $\log_{\frac{1}{2}} 2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{8}$.

2. Lôgarit của một thương

7

Cho $b_1 = 2^5$, $b_2 = 2^3$. Tính $\log_2 b_1 - \log_2 b_2$, $\log_2 \frac{b_1}{b_2}$ và so sánh các kết quả.

ĐỊNH LÍ 2

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2 .$$

Lôgarit của một thương bằng hiệu các lôgarit.

Đặc biệt $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ $(a > 0, b > 0, a \neq 1)$.

Định lí 2 được chứng minh tương tự Định lí 1.

Ví dụ 4. Tính $\log_7 49 - \log_7 343$.

Giải. $\log_7 49 - \log_7 343 = \log_7 \frac{49}{343} = \log_7 \frac{1}{7} = -\log_7 7 = -1.$

3. Lôgarit của một luỹ thừa

ĐỊNH LÍ 3

Cho hai số dương a, b ; $a \neq 1$. Với mọi α, ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b .$$

Lôgarit của một luỹ thừa bằng tích của số mũ với lôgarit của cơ số.

Đặc biệt $\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.}$

Chứng minh. Đặt $\beta = \log_a b$ thì $b = a^{\beta}$.

Do đó $\quad b^{\alpha} = (a^{\beta})^{\alpha} = a^{\alpha\beta}$.

Suy ra $\quad \alpha\beta = \log_a b^{\alpha}$ hay $\alpha \log_a b = \log_a b^{\alpha}$. ■

Ví dụ 5. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}}$; $\qquad$ b) $\log_5 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_5 15$.

Giải

a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}} = \log_2 2^{\frac{2}{7}} = \dfrac{2}{7}\log_2 2 = \dfrac{2}{7}$;

b) $\log_5 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_5 15 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{15}$

$$= \log_5 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

III – ĐỔI CƠ SỐ

8

Cho $a = 4$, $b = 64$, $c = 2$. Tính $\log_a b$, $\log_c a$, $\log_c b$.

Tìm một hệ thức liên hệ giữa ba kết quả thu được.

ĐỊNH LÍ 4

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1$, $c \neq 1$, ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Đặc biệt $\qquad \boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}} \qquad (b \neq 1)$

$$\boxed{\log_{a^{\alpha}} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b} \qquad (\alpha \neq 0).$$

Chứng minh. Theo tính chất của lôgarit và Định lí 3, ta có

$$\log_c b = \log_c(a^{\log_a b}) = \log_a b.\log_c a.$$

Vì $a \neq 1$ nên $\log_c a \neq 0.$ Do đó

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad \blacksquare$$

IV – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 6. Tính :

a) $2^{\log_4 15}$; b) $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2}$.

Giải

a) Ta có $\log_4 15 = \log_{2^2} 15 = \dfrac{1}{2}\log_2 15 = \log_2 \sqrt{15}$.

Do đó $2^{\log_4 15} = 2^{\log_2 \sqrt{15}} = \sqrt{15}$.

b) Vì $\log_{\frac{1}{27}} 2 = \log_{3^{-3}} 2 = -\dfrac{1}{3}\log_3 2 = \log_3 2^{-\frac{1}{3}} = \log_3 \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

nên $3^{\log_{\frac{1}{27}} 2} = 3^{\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ví dụ 7. Cho $\alpha = \log_2 20$. Hãy tính $\log_{20} 5$ theo α.

Giải. Ta có

$$\alpha = \log_2 20 = \log_2(2^2.5) = 2\log_2 2 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5,$$

suy ra $\log_2 5 = \alpha - 2$.

Vậy $\log_{20} 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 20} = \dfrac{\alpha - 2}{\alpha}$.

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức

$$A = \log_{\frac{1}{3}} 7 + 2\log_9 49 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{7}.$$

Giải. Ta có

$$A = \log_{3^{-1}} 7 + 2\log_{3^2}(7^2) - \log_{3^{\frac{1}{2}}}(7^{-1})$$

$$= -\log_3 7 + 2\log_3 7 + 2\log_3 7 = 3\log_3 7.$$

Ví dụ 9. So sánh các số $\log_2 3$ và $\log_6 5$.

Giải. Đặt $\alpha = \log_2 3$, $\beta = \log_6 5$.

Ta có $2^{\alpha} = 3 > 2^1$ nên $\alpha > 1$; $6^{\beta} = 5 < 6^1$ nên $\beta < 1$.

Suy ra $\alpha > \beta$.

Vậy $\log_2 3 > \log_6 5$.

V – LÔGARIT THẬP PHÂN. LÔGARIT TỰ NHIÊN

1. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10.

$\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

2. Lôgarit tự nhiên

Người ta chứng minh được dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e,

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Một giá trị gần đúng của e là $\mathrm{e} \approx 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045$.

Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e.

$\log_e b$ được viết là $\ln b$.

CHÚ Ý

Muốn tính $\log_a b$, với $a \neq 10$ và $a \neq \mathrm{e}$, bằng máy tính bỏ túi, ta có thể sử dụng công thức đổi cơ số.

Chẳng hạn,

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,584\ 962\ 501.$$

$$\log_3 0,8 = \frac{\ln 0,8}{\ln 3} \approx -0,203\ 114\ 013.$$

Bài tập

1. Không sử dụng máy tính, hãy tính :

a) $\log_2 \frac{1}{8}$;

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$;

c) $\log_3 \sqrt[4]{3}$;

d) $\log_{0,5} 0,125$.

2. Tính :

a) $4^{\log_2 3}$;

b) $27^{\log_9 2}$;

c) $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$;

d) $4^{\log_8 27}$.

3. Rút gọn biểu thức :

a) $\log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$;

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$.

4. So sánh các cặp số sau :

a) $\log_3 5$ và $\log_7 4$;

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_5 3$;

c) $\log_2 10$ và $\log_5 30$.

5. a) Cho $a = \log_{30} 3$, $b = \log_{30} 5$. Hãy tính $\log_{30} 1350$ theo a, b.

b) Cho $c = \log_{15} 3$. Hãy tính $\log_{25} 15$ theo c.

BẠN CÓ BIẾT

AI ĐÃ PHÁT MINH RA LÔGARIT ?

J. Napier
(1550 – 1617)

Nê-pe (John Napier) là nhà toán học Xcốt-len (Scotland). Ông sinh năm 1550 tại Me-ti-ston (Metiston-Castle), gần thành phố Ê-đin-bơc (Edinburgh) và tốt nghiệp trường Đại học Tổng hợp Ê-đin-bơc.

Nê-pe là người phát minh ra lôgarit. Thuật ngữ "Lôgarit" do ông đề nghị xuất phát từ sự kết hợp hai từ Hi Lạp λόγος (đọc là "logos" có nghĩa là tỉ số) và 'αριθμ ός (đọc là "aritmos" có nghĩa là số). Trong toán học cổ, bình phương, lập phương, ... được gọi là *các tỉ số kép*, bội ba,... Như vậy, đối với Nê-pe, từ λόγos 'αρi θμós có nghĩa là "số tỉ số". Lôgarit được Nê-pe xem là số trợ giúp để tính tỉ số của hai số.

Trong tác phẩm "Mô tả bảng lôgarit kì diệu" (1614), Nê-pe đưa ra định nghĩa và các tính chất của lôgarit. Lôgarit mà Nê-pe xét có cơ số gần bằng $\frac{1}{e}$.

Thuật ngữ "Lôgarit tự nhiên" do Men-gô-li (P. Mengoli – 1659) và Men-ca-tơ (N. Mencator – 1668) đưa ra. Năm 1893, Prin-xêm (A. Pringshelm) đã kí hiệu lôgarit tự nhiên của số N bởi ln N. Bởi vậy, việc gọi lôgarit tự nhiên là lôgarit Nê-pe không có cơ sở. Tuy nhiên, người ta vẫn thường gọi như vậy có lẽ là do đã gắn lôgarit tự nhiên với tên người thiết lập bảng lôgarit đầu tiên.

Ngoài ra, Nê-pe còn là tác giả của một loạt các công thức dành cho việc giải các tam giác cầu, rất tiện lợi cho việc lấy lôgarit.

Ngày 4-4-1617, Nê-pe qua đời tại quê hương ông.

§4 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

I – HÀM SỐ MŨ

Ví dụ 1. Bài toán "lãi kép"

Một người gửi số tiền 1 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Hỏi người đó được lĩnh bao nhiêu tiền sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$), nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi ?

Giải. Giả sử $n \geq 2$. Gọi số vốn ban đầu là P, lãi suất là r. Ta có $P = 1$ (triệu đồng), $r = 0{,}07$.

• Sau năm thứ nhất :

Tiền lãi là $T_1 = Pr = 1 \,.\, 0{,}07 = 0{,}07$ (triệu đồng).

Số tiền được lĩnh (còn gọi là vốn tích luỹ) là

$$P_1 = P + T_1 = P + Pr = P(1 + r) = 1{,}07 \text{ (triệu đồng).}$$

• Sau năm thứ hai :

Tiền lãi là $T_2 = P_1 r = 1{,}07 \,.\, 0{,}07 = 0{,}0749$ (triệu đồng).

Vốn tích luỹ là $P_2 = P_1 + T_2 = P_1 + P_1 r = P_1(1 + r)$

$$= P(1 + r)^2 = (1{,}07)^2 = 1{,}1449 \text{ (triệu đồng).}$$

• Tương tự, vốn tích luỹ sau n năm là

$$P_n = P(1 + r)^n = (1{,}07)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy sau n năm, người đó được lĩnh $(1{,}07)^n$ triệu đồng.

Ví dụ 2. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác).

Ví dụ 3. Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

1

Cho biết năm 2003, Việt Nam có 80 902 400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi năm 2010 Việt Nam sẽ có bao nhiêu người, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi ?

Những bài toán thực tế như trên đưa đến việc xét các hàm số có dạng $y = a^x$.

1. Định nghĩa

> Cho số thực dương a khác 1.
>
> Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a.

2

Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ ? Với cơ số bao nhiêu ?

a) $y = (\sqrt{3})^x$; b) $y = 5^{\frac{x}{3}}$; c) $y = x^{-4}$; d) $y = 4^{-x}$.

2. Đạo hàm của hàm số mũ

Ta thừa nhận công thức

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1. \qquad (1)$$

ĐỊNH LÍ 1

> Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi x và
>
> $$(e^x)' = e^x.$$

Chứng minh. Giả sử Δx là số gia của x, ta có

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

Do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Áp dụng (1), ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Từ đó suy ra

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x. \qquad \blacksquare$$

CHÚ Ý

Công thức đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số e^u $(u = u(x))$ là $(e^u)' = u'.e^u$.

ĐỊNH LÍ 2

> Hàm số $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi x và
>
> $$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Chứng minh. Ta có

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Đặt $u(x) = x \ln a$, theo Chú ý trên, ta được

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a. \qquad \blacksquare$$

CHÚ Ý

Đối với hàm hợp $y = a^{u(x)}$, ta có

$$\boxed{(a^u)' = a^u \ln a \,.\, u'.}$$

Ví dụ 4. Hàm số $y = 8^{x^2 + x + 1}$ có đạo hàm là

$$y' = 8^{x^2 + x + 1}(x^2 + x + 1)' \ln 8 = 8^{x^2 + x + 1}(2x + 1) \ln 8.$$

3. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y = a^x$, $a > 1$

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

$$y' = a^x \ln a > 0, \quad \forall x.$$

Giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

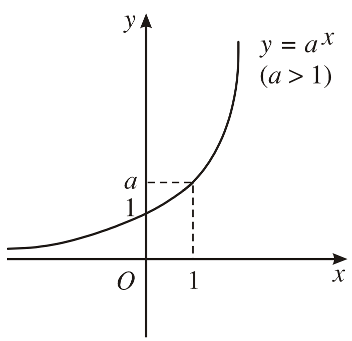
Tiệm cận :

Trục Ox là tiệm cận ngang.

3. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	+	+	
y	0 ↗	1	a	$+\infty$

4. Đồ thị (H.31)



Hình 31

$y = a^x$, $0 < a < 1$

1. Tập xác định : $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên

$$y' = a^x \ln a < 0, \quad \forall x.$$

Giới hạn đặc biệt :

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

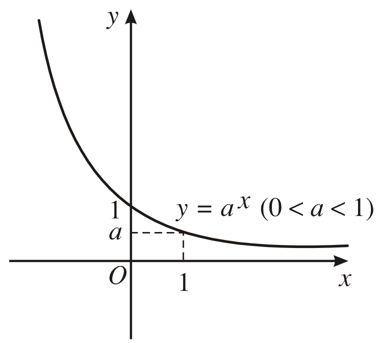
Tiệm cận :

Trục Ox là tiệm cận ngang.

3. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	–	–	–	
y	$+\infty$ ↘	1	a	0

4. Đồ thị (H.32)



Hình 32

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số mũ $y = a^x$ (a > 0, a ≠ 1)

Tập xác định	$(-\infty ; +\infty)$.
Đạo hàm	$y' = a^x \ln a$.
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến ; $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	trục Ox là tiệm cận ngang.
Đồ thị	đi qua các điểm $(0 ; 1)$ và $(1 ; a)$, nằm phía trên trục hoành $(y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$.

II – HÀM SỐ LÔGARIT

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a.

Ví dụ 5. Các hàm số $y = \log_3 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, $y = \log_{\sqrt{5}} x$, $y = \ln x$, $y = \log x$ là những hàm số lôgarit với cơ số lần lượt là 3, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{5}$, e và 10.

2. Đạo hàm của hàm số lôgarit

Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 3

Hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Đặc biệt $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$

CHÚ Ý

Đối với hàm hợp $y = \log_a u(x)$, ta có

$$\boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}.}$$

Ví dụ 6. Hàm số $y = \log_2(2x+1)$ có đạo hàm là

$$y' = (\log_2(2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}.$$

3

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

3. Khảo sát hàm số lôgarit $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$y = \log_a x,\ a > 1$	$y = \log_a x,\ 0 < a < 1$
1. Tập xác định : $(0\ ;+\infty)$.	1. Tập xác định : $(0\ ;+\infty)$.
2. Sự biến thiên	2. Sự biến thiên
$y' = \dfrac{1}{x\ln a} > 0,\quad \forall x > 0.$	$y' = \dfrac{1}{x\ln a} < 0,\quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt :	Giới hạn đặc biệt :
$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty,$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty,$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty.$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty.$
Tiệm cận :	Tiệm cận :
Trục Oy là tiệm cận đứng.	Trục Oy là tiệm cận đứng.
3. Bảng biến thiên	3. Bảng biến thiên

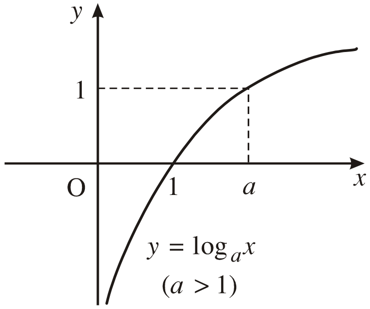
Bảng biến thiên ($a > 1$):

x	0		1		a		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng biến thiên ($0 < a < 1$):

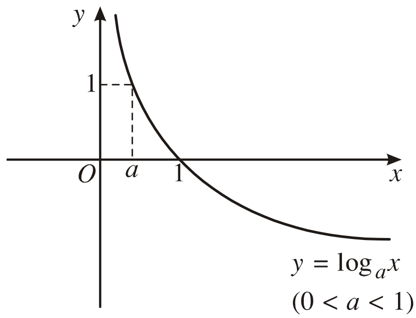
x	0		a		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. Đồ thị (H.33)



Hình 33

4. Đồ thị (H.34)



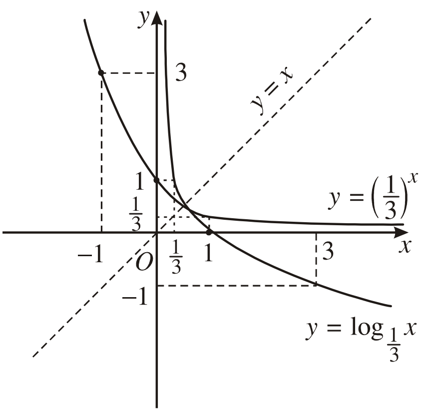
Hình 34

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

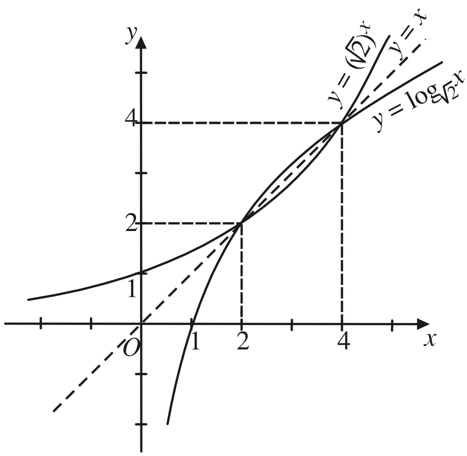
Tập xác định	$(0 ; +\infty)$.
Đạo hàm	$y' = \dfrac{1}{x\ln a}$.
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến ; $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	trục Oy là tiệm cận đứng.
Đồ thị	đi qua các điểm $(1 ; 0)$ và $(a ; 1)$; nằm phía bên phải trục tung.

Dưới đây là đồ thị của các hàm số :

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ (H.35) ; $y = \log_{\sqrt{2}} x$, (H.36).



Hình 35



Hình 36

4
Nêu nhận xét về mối liên hệ giữa đồ thị của các hàm số trên Hình 35 và Hình 36.

NHẬN XÉT

Đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Bảng đạo hàm của các hàm số luỹ thừa, mũ, lôgarit

Hàm sơ cấp	Hàm hợp $(u = u(x))$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = e^u u'$ $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a \|x\|)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a \|u\|)' = \frac{u'}{u\ln a}$

Bài tập

1. Vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = 4^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

2. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = 2xe^x + 3\sin 2x$; b) $y = 5x^2 - 2^x \cos x$; c) $y = \frac{x+1}{3^x}$.

3. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \log_2(5 - 2x)$; b) $y = \log_3(x^2 - 2x)$;

c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$; d) $y = \log_{0,4}\frac{3x+2}{1-x}$.

4. Vẽ đồ thị của các hàm số :

a) $y = \log x$;　　　　　　b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

5. Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = 3x^2 - \ln x + 4\sin x$;

b) $y = \log(x^2 + x + 1)$;

c) $y = \dfrac{\log_3 x}{x}$.

§5 PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

I – PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán

Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu ?

Giải. Gọi số tiền gửi ban đầu là P. Sau n năm, số tiền thu được là

$$P_n = P(1 + 0{,}084)^n = P(1{,}084)^n.$$

Để $P_n = 2P$ thì phải có $(1{,}084)^n = 2$.

Do đó　　　　$n = \log_{1{,}084} 2 \approx 8{,}59.$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$.

Vậy muốn thu được gấp đôi số tiền ban đầu, người đó phải gửi 9 năm.

• Những bài toán thực tế như trên đưa đến việc giải các phương trình có chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa. Ta gọi đó là các *phương trình mũ*.

Chẳng hạn, các phương trình $3^x = 8$, $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x - \dfrac{4}{3^x} + 3 = 0$ là những phương trình mũ.

1. Phương trình mũ cơ bản

> Phương trình mũ cơ bản có dạng
>
> $$a^x = b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Để giải phương trình trên, ta sử dụng định nghĩa lôgarit.

Với $b > 0$, ta có $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Với $b \leq 0$, phương trình vô nghiệm.

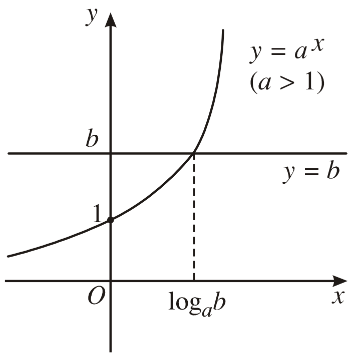
Minh hoạ bằng đồ thị

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = a^x$ và $y = b$ là nghiệm của phương trình $a^x = b$.

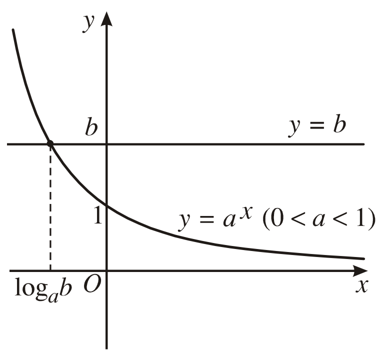
Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị.

Rõ ràng, nếu $b \leq 0$ thì hai đồ thị không cắt nhau nên phương trình vô nghiệm.

Nếu $b > 0$ ta có hai đồ thị trên các hình 37 và 38. Trên mỗi hình, hai đồ thị luôn cắt nhau tại một điểm nên phương trình có nghiệm duy nhất.



Hình 37



Hình 38

Kết luận

Phương trình $a^x = b \ (a > 0, a \neq 1)$	
$b > 0$	có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
$b \leq 0$	vô nghiệm.

Ví dụ 1. Giải phương trình $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 5$.

Giải. Đưa vế trái về cùng cơ số 4, ta được

$$\frac{1}{2}.4^x + 4.4^x = 5 \text{ hay } 4^x = \frac{10}{9}.$$

Vậy $x = \log_4 \frac{10}{9}$.

2. Cách giải một số phương trình mũ đơn giản

Người ta thường sử dụng các phương pháp sau để giải một số phương trình mũ.

a) Đưa về cùng cơ số

1

Giải phương trình $6^{2x-3} = 1$ bằng cách đưa về dạng $a^{A(x)} = a^{B(x)}$ và giải phương trình $A(x) = B(x)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$.

Giải. Đưa hai vế về cùng cơ số $\frac{3}{2}$, ta được

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}.$$

Do đó $5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Đặt ẩn phụ

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$9^x - 4.3^x - 45 = 0.$$

Giải. Đặt $t = 3^x$, $t > 0$, ta có phương trình

$$t^2 - 4t - 45 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này, ta được hai nghiệm $t_1 = 9$, $t_2 = -5$.

Chỉ có nghiệm $t_1 = 9$ thoả mãn điều kiện $t > 0$.

Do đó $3^x = 9$. Vậy $x = 2$.

2

Giải phương trình $\frac{1}{5}.5^{2x} + 5.5^x = 250$ bằng cách đặt ẩn phụ $t = 5^x$.

c) Lôgarit hoá

Ví dụ 4. Giải phương trình $3^x.2^{x^2} = 1$.

Giải. Lấy lôgarit hai vế với cơ số 3 (còn gọi là **lôgarit hoá**), ta được

$$\log_3(3^x.2^{x^2}) = \log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 3^x + \log_3 2^{x^2} = 0.$$

Từ đó ta có

$$x + x^2 \log_3 2 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x\log_3 2) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x_1 = 0 \text{ và } x_2 = -\frac{1}{\log_3 2} = -\log_2 3.$$

II – PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

Chẳng hạn, các phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 4 \text{ và } \log_4^2 x - 2\log_4 x + 1 = 0$$

đều là phương trình lôgarit.

1. Phương trình lôgarit cơ bản

3

Tính x, biết $\log_3 x = \frac{1}{4}$.

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng

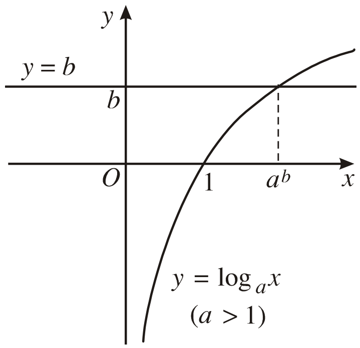
$$\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1).$$

Theo định nghĩa lôgarit, ta có

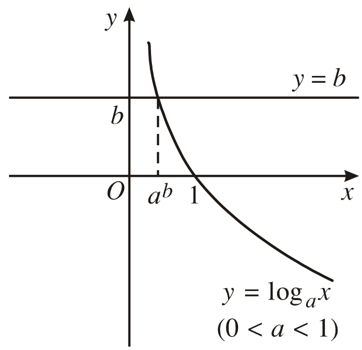
$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

Minh hoạ bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H. 39 và H. 40).



Hình 39



Hình 40

Trong cả hai trường hợp, ta đều thấy đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$ luôn cắt nhau tại một điểm với mọi $b \in \mathbb{R}$.

KẾT LUẬN

Phương trình $\log_a x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$ luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$ với mọi b.

2. Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản

Người ta thường sử dụng các phương pháp sau để giải một số phương trình lôgarit.

a) Đưa về cùng cơ số

4

Cho phương trình $\log_3 x + \log_9 x = 6$. Hãy đưa các lôgarit ở vế trái về cùng cơ số.

__Ví dụ 5.__ Giải phương trình $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$.

__Giải.__ Đưa các số hạng ở vế trái về cùng cơ số 3, ta được

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 11$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x = 6.$$

Vậy $x = 3^6 = 729$.

b) Đặt ẩn phụ

5

Giải phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ bằng cách đặt ẩn phụ $t = \log_2 x$.

__Ví dụ 6.__ Giải phương trình

$$\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1.$$

__Giải.__ Điều kiện của phương trình là $x > 0$, $\log x \neq 5$ và $\log x \neq -1$.

Đặt $t = \log x$ $(t \neq 5, t \neq -1)$, ta được phương trình

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} = 1.$$

Từ đó ta có phương trình

$$1 + t + 2(5 - t) = (5 - t)(1 + t)$$

$$\Leftrightarrow -t + 11 = -t^2 + 4t + 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai theo t, ta được hai nghiệm $t_1 = 2$, $t_2 = 3$ đều thoả mãn điều kiện $t \neq 5, t \neq -1$.

Vậy $\log x_1 = 2$, $\log x_2 = 3$ nên $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

6

Giải phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2^2 x = 2$.

c) Mũ hoá

Ví dụ 7. Giải phương trình $\log_2(5-2^x) = 2 - x$.

Điều kiện của phương trình là $5 - 2^x > 0$.

Giải. Theo định nghĩa, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2^{\log_2(5-2^x)} = 2^{2-x}.$$

(Phép biến đổi này thường được gọi là **mũ hoá**). Từ đó ta có

$$5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 5.2^x + 4 = 0.$$

Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$, ta có phương trình bậc hai $t^2 - 5t + 4 = 0$ với hai nghiệm dương $t = 1$, $t = 4$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 0$, $x = 2$.

Bài tập

1. Giải các phương trình mũ :

a) $(0,3)^{3x-2} = 1$;

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$;

c) $2^{x^2-3x+2} = 4$;

d) $(0,5)^{x+7}.(0,5)^{1-2x} = 2$.

2. Giải các phương trình mũ :

a) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$;

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$;

c) $64^x - 8^x - 56 = 0$;

d) $3.4^x - 2.6^x = 9^x$.

3. Giải các phương trình lôgarit :

a) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$;

b) $\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2$;

c) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$;

d) $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x-3)$.

4. Giải các phương trình lôgarit :

a) $\frac{1}{2}\log(x^2 + x - 5) = \log 5x + \log\frac{1}{5x}$;

b) $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$;

c) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$.

§6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

I - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

> Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.

Ta xét bất phương trình dạng $a^x > b$.

• Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$ vì $a^x > 0 \geq b, \forall x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Ví dụ 1

a) $3^x > 81 \Leftrightarrow x > \log_3 81 \Leftrightarrow x > 4$;

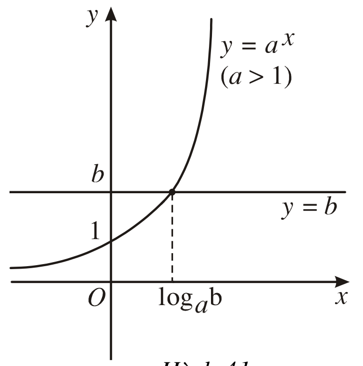
b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 32 \Leftrightarrow x < -5$.

Minh hoạ bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số $y = a^x$ và đường thẳng $y = b$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

Trong trường hợp $a > 1$ ta nhận thấy :

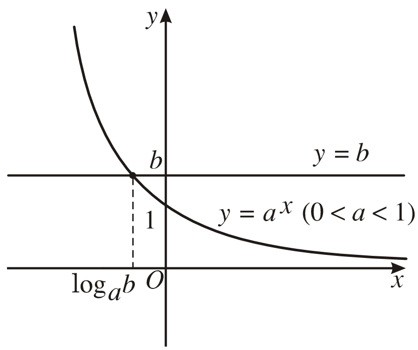
- Nếu $b \leq 0$ thì $a^x > b$ với mọi x.
- Nếu $b > 0$ thì $a^x > b$ với $x > \log_a b$ (H. 41).



Hình 41

Trường hợp $0 < a < 1$, ta có :

- Nếu $b \leq 0$ thì $a^x > b$ với mọi x.
- Nếu $b > 0$ thì $a^x > b$ với $x < \log_a b$ (H. 42).



Hình 42

Kết luận. Tập nghiệm của bất phương trình $a^x > b$ được cho trong bảng sau :

$a^x > b$	*Tập nghiệm*	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \leq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b\ ;+\infty)$	$(-\infty\ ;\log_a b)$

1

Hãy lập bảng tương tự cho các bất phương trình $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$.

2. Bất phương trình mũ đơn giản

Dưới đây là một số ví dụ về bất phương trình mũ đơn giản.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $3^{x^2 - x} < 9$.

Giải. Bất phương trình đã cho có thể viết ở dạng

$$3^{x^2 - x} < 3^2.$$

Vì cơ số 3 lớn hơn 1 nên $x^2 - x < 2$.

Đây là bất phương trình bậc hai quen thuộc. Giải bất phương trình này, ta được $-1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(-1\ ;\ 2)$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $4^x - 2.5^{2x} < 10^x$.

Giải. Chia hai vế của bất phương trình cho 10^x, ta được

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ $(t > 0)$, ta có bất phương trình

$$t - \frac{2}{t} < 1 \text{ hay } \frac{t^2 - t - 2}{t} < 0.$$

Giải bất phương trình này với điều kiện $t > 0$, ta được $0 < t < 2$. Do đó

$$0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2.$$

Vì cơ số $\frac{2}{5}$ nhỏ hơn 1 nên $x > \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(\log_{\frac{2}{5}} 2\ ;\ +\infty)$.

2

Giải bất phương trình $2^x + 2^{-x} - 3 < 0$.

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Bất phương trình lôgarit cơ bản

Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với $a > 0$, $a \neq 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

Trường hợp $a > 1$, ta có

$$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b.$$

Trường hợp $0 < a < 1$, ta có

$$\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$$

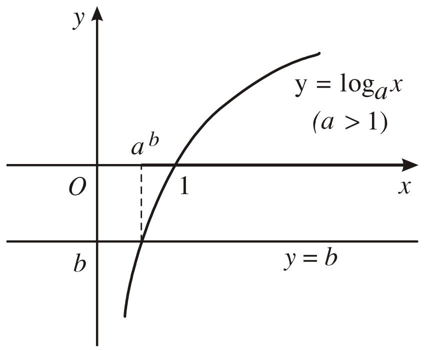
Ví dụ 4

a) $\log_2 x > 7 \Leftrightarrow x > 2^7 \Leftrightarrow x > 128$.

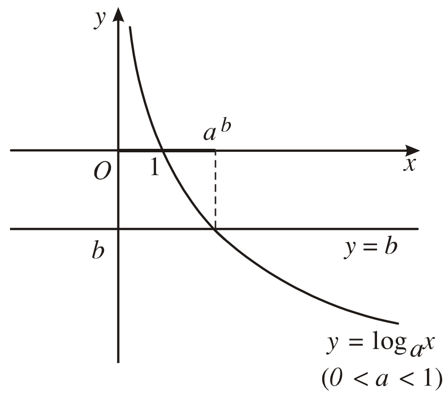
b) $\log_{\frac{1}{2}} x > 3 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{8}$.

Minh hoạ bằng đồ thị

Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và đường thẳng $y = b$ trên cùng một hệ trục toạ độ (H. 43, H. 44).



Hình 43



Hình 44

Quan sát đồ thị, ta thấy :

Trường hợp $a > 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $x > a^b$.

Trường hợp $0 < a < 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $0 < x < a^b$.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình $\log_a x > b$ được cho trong bảng sau :

$\log_a x > b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$x > a^b$	$0 < x < a^b$

3

Hãy lập bảng tương tự cho các bất phương trình $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$.

2. Bất phương trình lôgarit đơn giản

Ta xét một số ví dụ về bất phương trình lôgarit đơn giản.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\log_{0,5}(5x+10) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$.

Giải. Điều kiện của bất phương trình đã cho là

$$\begin{cases} 5x+10>0 \\ x^2+6x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<-4 \text{ hoặc } x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>-2.$$

Vì cơ số 0,5 bé hơn 1 nên với điều kiện đó, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $5x+10 > x^2+6x+8$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2<0 \Leftrightarrow -2<x<1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(-2\ ;\ 1)$.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\log_2(x-3)+\log_2(x-2) \le 1$.

Giải. Điều kiện của bất phương trình là $x>3$. Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2[(x-3)(x-2)] \le \log_2 2.$$

Vì cơ số 2 lớn hơn 1 nên $(x-3)(x-2) \le 2$.

Giải bất phương trình này, ta tìm được $1 \le x \le 4$. Kết hợp với điều kiện $x>3$, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $3 < x \le 4$.

4

Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$.

Bài tập

1. Giải các bất phương trình mũ :

a) $2^{-x^2+3x} < 4$;

b) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \ge \frac{9}{7}$;

c) $3^{x+2}+3^{x-1} \le 28$;

d) $4^x - 3.2^x + 2 > 0$.

2. Giải các bất phương trình lôgarit :

a) $\log_8(4-2x) \geq 2$;

b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$;

c) $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3$;

d) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0$.

Ôn tập chương II

1. Hãy nêu các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực.

2. Hãy nêu các tính chất của hàm số luỹ thừa.

3. Hãy nêu các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

4. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \dfrac{1}{3^x - 3}$;

b) $y = \log \dfrac{x-1}{2x-3}$;

c) $y = \log\sqrt{x^2 - x - 12}$;

d) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$.

5. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$. Hãy tính $2^x + 2^{-x}$.

6. Cho $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Hãy tính $\log_a x$ với :

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$;

b) $x = \dfrac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

7. Giải các phương trình :

a) $3^{x+4} + 3.5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$;

b) $25^x - 6.5^x + 5 = 0$;

c) $4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$;

d) $\log_7(x-1)\log_7 x = \log_7 x$;

e) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

g) $\log \dfrac{x+8}{x-1} = \log x$.

8. Giải các bất phương trình :

a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$;

b) $(0,4)^x - \left(2,5\right)^{x+1} > 1,5$;

c) $\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)\right] < 1$;

d) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$.

Bài tập trắc nghiệm

1. Tập xác định của hàm số $y = \log\dfrac{x-2}{1-x}$ là :

(A) $(-\infty\ ;\ 1) \cup (2\ ;\ +\infty)$; (B) $(1\ ;\ 2)$;

(C) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; (D) $\mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ 2\}$.

2. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau :

(A) $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; (B) $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$;

(C) $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b > 0$; (D) $\log_{\frac{1}{2}} a = \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a = b > 0$.

3. Cho hàm số $f(x) = \ln(4x - x^2)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

(A) $f'(2) = 1$; (B) $f'(2) = 0$;

(C) $f'(5) = 1{,}2$; (D) $f'(-1) = -1{,}2$.

4. Cho hàm số $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7)$. Nghiệm của bất phương trình $g(x) > 0$ là :

(A) $x > 3$; (B) $x < 2$ hoặc $x > 3$;

(C) $2 < x < 3$; (D) $x < 2$.

5. Trong các hàm số :

$$f(x) = \ln\frac{1}{\sin x},\ g(x) = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x},\ h(x) = \ln\frac{1}{\cos x},$$

hàm số nào có đạo hàm là $\dfrac{1}{\cos x}$?

(A) $f(x)$; (B) $g(x)$; (C) $h(x)$; (D) $g(x)$ và $h(x)$.

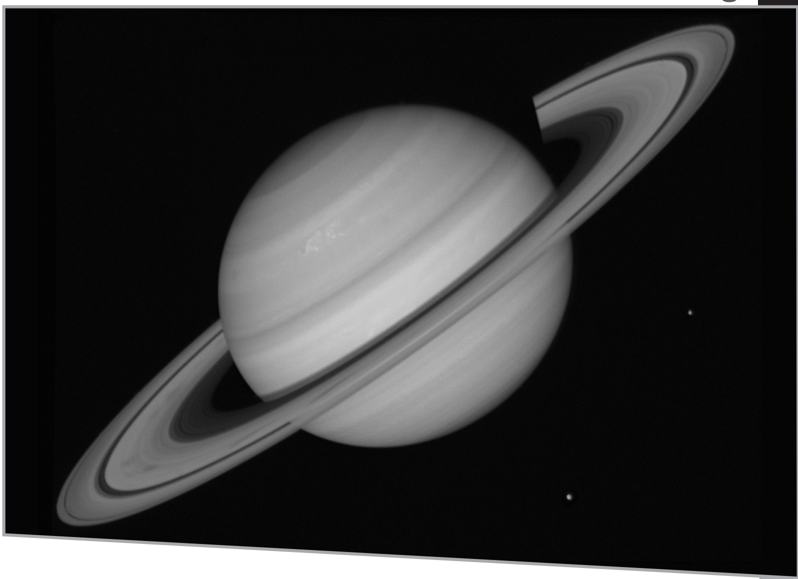
6. Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5} = 1$ là :

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) 3.

7. Nghiệm của phương trình $10^{\log 9} = 8x + 5$ là :

(A) 0 ; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) $\dfrac{5}{8}$; (D) $\dfrac{7}{4}$.

Chương III



NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1 NGUYÊN HÀM

I – NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

1
Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ nếu :

a) $f(x) = 3x^2$ với $x \in (-\infty ; +\infty)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$.

ĐỊNH NGHĨA

> Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K.
> Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Ví dụ 1

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x, \forall x \in (-\infty ; +\infty)$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \forall x \in (0 ; +\infty)$.

2
Hãy tìm thêm những nguyên hàm khác của các hàm số nêu trong Ví dụ 1.

ĐỊNH LÍ 1

> Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

3
Hãy chứng minh Định lí 1.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Chứng minh. Giả sử $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K, tức là $G'(x) = f(x)$, $x \in K$. Khi đó

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ x \in K.$$

Vậy $G(x) - F(x)$ là một hàm số không đổi trên K. Ta có

$$G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C,\ x \in K. \qquad \blacksquare$$

Hai định lí trên cho thấy :

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.}$$

CHÚ Ý

Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 2

a) Với $x \in (-\infty\ ;\ +\infty)$, $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$;

b) Với $s \in (0\ ;\ +\infty)$, $\int \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \ln s + C$;

c) Với $t \in (-\infty\ ;\ +\infty)$, $\int \cos t\mathrm{d}t = \sin t + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

TÍNH CHẤT 1

$$\boxed{\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.}$$

Tính chất này được suy trực tiếp từ định nghĩa nguyên hàm.

Ví dụ sau đây minh hoạ cho tính chất đó.

Ví dụ 3. $\int (\cos x)'\mathrm{d}x = \int (-\sin x)\mathrm{d}x = \cos x + C.$

TÍNH CHẤT 2

$$\boxed{\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x} \qquad (k \text{ là hằng số khác } 0).$$

Chứng minh. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $kf(x)$, ta có

$$kf(x) = F'(x) \qquad (*)$$

Vì $k \neq 0$ nên $f(x) = \frac{1}{k}F'(x) = \left(\frac{1}{k}F(x)\right)'$.

Từ đó, theo tính chất 1 ta có

$$k\int f(x)\mathrm{d}x = k\int \left(\frac{1}{k}F(x)\right)'\mathrm{d}x = k\left(\frac{1}{k}F(x) + C_1\right) = F(x) + kC_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$= F(x) + C$ (vì C_1 tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$ và $k \neq 0$ nên $C = kC_1$ tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$)

$= \int kf(x)\mathrm{d}x$ (do (*)). ■

TÍNH CHẤT 3

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.}$$

4
Hãy chứng minh Tính chất 3.

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sin x + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Giải. Với $x \in (0 ; +\infty)$, ta có

$$\int \left(3\sin x + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = 3\int \sin x\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -3\cos x + 2\ln x + C.$$

3. Sự tồn tại nguyên hàm

Ta thừa nhận định lí dưới đây.

ĐỊNH LÍ 3

> Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Ví dụ 5

a) Hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0\,;+\infty)$ và

$$\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C.$$

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên từng khoảng $(k\pi\,;(k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ và

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$$

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

5

Lập bảng theo mẫu dưới đây rồi dùng bảng đạo hàm trang 77 và trong SGK Đại số và Giải tích 11 để điền các hàm số thích hợp vào cột bên phải.

$f'(x)$	$f(x) + C$
0	
$\alpha x^{\alpha-1}$	
$\dfrac{1}{x}$	
e^x	
$a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$	
$\cos x$	
$-\sin x$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	

Từ bảng các đạo hàm, ta có bảng nguyên hàm sau đây.

$\int 0\mathrm{d}x = C$	$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1)$
$\int \mathrm{d}x = x + C$	$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\int x^\alpha\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$	$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$
$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$

Ví dụ 6. Tính :

a) $\int\left(2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x$ trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$;

b) $\int(3\cos x - 3^{x-1})\mathrm{d}x$ trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

Giải

a) Với $x \in (0\ ;\ +\infty)$ ta có

$$\int\left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x = 2\int x^2\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

b) Với $x \in (-\infty\ ;\ +\infty)$ ta có

$$\int(3\cos x - 3^{x-1})\mathrm{d}x = 3\int\cos x\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int 3^x\mathrm{d}x$$

$$= 3\sin x - \frac{1}{3}\frac{3^x}{\ln 3} + C = 3\sin x - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C.$$

CHÚ Ý

Từ đây, yêu cầu tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên từng khoảng xác định của nó.

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

6

a) Cho $\int (x-1)^{10}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = x - 1$, hãy viết $(x-1)^{10}\mathrm{d}x$ theo u và $\mathrm{d}u$.

b) Cho $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $x = e^t$, hãy viết $\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ theo t và $\mathrm{d}t$.

ĐỊNH LÍ 1

> Nếu $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì
>
> $$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

Chứng minh. Theo công thức đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$(F(u(x)))' = F'(u).u'(x).$$

Vì $F'(u) = f(u) = f(u(x))$ nên $(F(u(x)))' = f(u(x))u'(x)$. ■

Như vậy, công thức $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$ đúng khi u là biến số độc lập thì cũng đúng khi u là một hàm số của biến số độc lập x.

HỆ QUẢ

Với $u = ax + b$ $(a \neq 0)$, ta có

$$\boxed{\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.}$$

Ví dụ 7. Tính $\int \sin(3x-1)\,\mathrm{d}x$.

Giải. Vì $\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$ nên theo hệ quả ta có

$$\int \sin(3x-1)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C.$$

CHÚ Ý

Nếu tính nguyên hàm theo biến mới u $(u = u(x))$ thì sau khi tính nguyên hàm, ta phải trở lại biến x ban đầu bằng cách thay u bởi $u(x)$.

Ví dụ 8. Tính $\int \frac{x}{(x+1)^5}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = x + 1$ thì $u' = 1$ và $\frac{x}{(x+1)^5}\mathrm{d}x$ được viết thành $\frac{u-1}{u^5}\mathrm{d}u$. Khi đó, nguyên hàm cần tính trở thành

$$\int \frac{u-1}{u^5}\mathrm{d}u = \int\left(\frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^5}\right)\mathrm{d}u = \int u^{-4}\mathrm{d}u - \int u^{-5}\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}.\frac{1}{u^3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{u^4} + C.$$

Thay $u = x + 1$ vào kết quả, ta được

$$\int \frac{x}{(x+1)^5}\mathrm{d}x = \frac{1}{(x+1)^3}\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\right) + C.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

7

Ta có $\quad (x\cos x)' = \cos x - x\sin x$

hay $\quad -x\sin x = (x\cos x)' - \cos x.$

Hãy tính $\int (x\cos x)'\mathrm{d}x$ và $\int \cos x\mathrm{d}x$. Từ đó tính $\int x\sin x\mathrm{d}x$.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Chứng minh. Từ công thức đạo hàm của tích

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

hay $\quad u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x),$

ta có $\quad \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int (u(x)v(x))'\mathrm{d}x - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$

Vậy $\quad \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$ ■

CHÚ Ý

Vì $v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, $u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, nên đẳng thức trên còn được viết ở dạng

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.}$$

Đó là công thức tính nguyên hàm từng phần.

Ví dụ 9. Tính

a) $\int xe^x dx$; b) $\int x\cos x dx$; c) $\int \ln x dx$.

Giải

a) Đặt $u = x$ và $dv = e^x dx$, ta có $du = dx$ và $v = e^x$. Do đó

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

b) Đặt $u = x$ và $dv = \cos x dx$, ta được $du = dx$ và $v = \sin x$. Vậy

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx$$

hay
$$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

c) Đặt $u = \ln x$, $dv = dx$, ta có $du = \frac{1}{x}dx$ và $v = x$. Do đó

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

8

Cho $P(x)$ là đa thức của x. Từ Ví dụ 9, hãy lập bảng theo mẫu dưới đây rồi điền u và dv thích hợp vào ô trống theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

	$\int P(x)e^x dx$	$\int P(x)\cos x dx$	$\int P(x)\ln x dx$
u	$P(x)$		
dv	$e^x dx$		

Bài tập

1. Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số còn lại ?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$; b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$;

c) $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x$ và $\left(1 - \frac{4}{x}\right)e^x$.

2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$; b) $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{e^x}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$;

d) $f(x) = \sin 5x.\cos 3x$;

e) $f(x) = \tan^2 x$;

g) $f(x) = e^{3-2x}$;

h) $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)(1 - 2x)}$.

3. Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính :

a) $\int (1 - x)^9 \,\mathrm{d}x$ (đặt $u = 1 - x$) ;

b) $\int x(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x$ (đặt $u = 1 + x^2$) ;

c) $\int \cos^3 x \sin x \,\mathrm{d}x$ (đặt $t = \cos x$) ;

d) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$).

4. Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính :

a) $\int x \ln(1 + x) \mathrm{d}x$;

b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x \mathrm{d}x$;

c) $\int x \sin(2x + 1) \mathrm{d}x$;

d) $\int (1 - x) \cos x \,\mathrm{d}x$.

§2 TÍCH PHÂN

I - KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

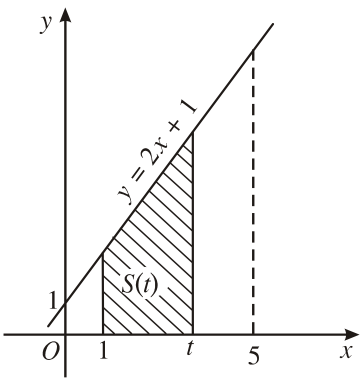
1. Diện tích hình thang cong

1

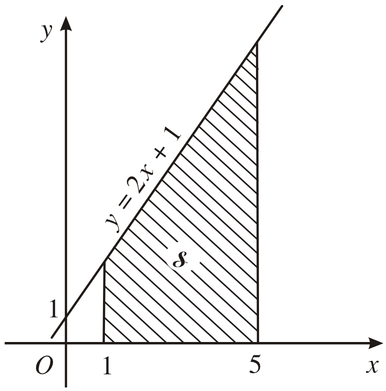
Kí hiệu T là hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = t$ $(1 \le t \le 5)$ (H.45).

1. Tính diện tích $\mathcal{S}$ của hình T khi $t = 5$ (H.46).

2. Tính diện tích $S(t)$ của hình T khi $t \in [1 ; 5]$.



Hình 45

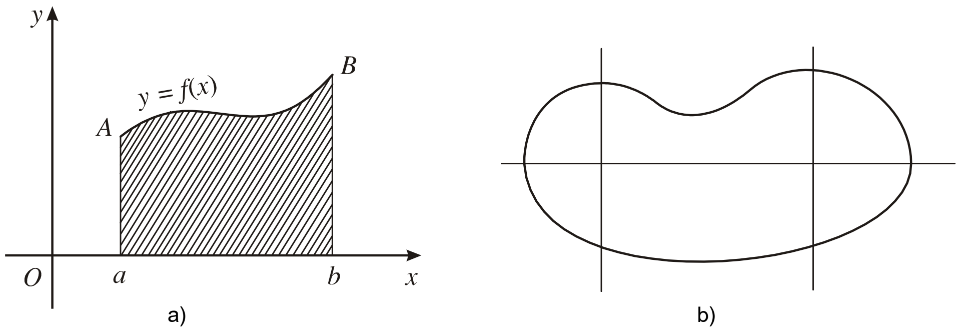


Hình 46

3. Chứng minh rằng $S(t)$ là một nguyên hàm của $f(t) = 2t + 1$, $t \in [1 ; 5]$ và diện tích $\mathcal{S} = S(5) - S(1)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a ; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được gọi là **hình thang cong** (H. 47a).

Ở lớp dưới, ta đã biết cách tính diện tích hình chữ nhật, hình tam giác. Bây giờ, ta xét bài toán tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi một đường cong kín bất kì (H. 47b).

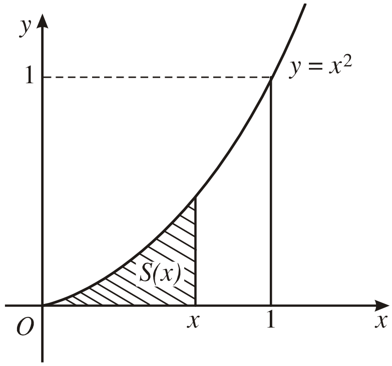


Hình 47

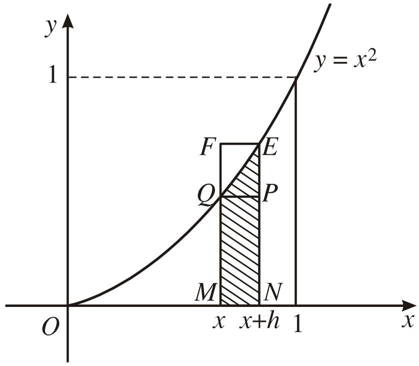
Bằng cách kẻ các đường thẳng song song với các trục toạ độ, ta chia D thành những hình nhỏ là những hình thang cong (H.47a). Bài toán trên được đưa về tính diện tích của hình thang cong.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

Giải. Với mỗi $x \in [0 ; 1]$ gọi $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đã cho nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ 0 và x (H. 48).



Hình 48



Hình 49

Ta chứng minh

$$S'(x) = x^2, x \in [0\,;1].$$

Thật vậy, với $h > 0$, $x + h < 1$, kí hiệu S_{MNPQ} và S_{MNEF} lần lượt là diện tích các hình chữ nhật $MNPQ$ và $MNEF$ (H.49), ta có

$$S_{MNPQ} \le S(x+h) - S(x) \le S_{MNEF}$$

hay

$$hx^2 \le S(x+h) - S(x) \le h(x+h)^2.$$

Vậy

$$0 \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \le 2xh + h^2.$$

Với $h < 0$, $x + h > 0$, tính toán tương tự, ta được

$$2xh + h^2 \le \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2 \le 0.$$

Tóm lại với mọi $h \neq 0$, ta có

$$\left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - x^2\right| \le 2x|h| + h^2.$$

Suy ra

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = x^2,\ x \in (0\ ;\ 1).$$

Ta cũng chứng minh được $S'(0) = 0$, $S'(1) = 1$.

Do đó, $S(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ trên đoạn $[0\ ;\ 1]$.

Mặt khác trên đoạn đó, $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ cũng là một nguyên hàm của $f(x) = x^2$ nên

$$S(x) = \frac{x^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Từ giả thiết $S(0) = 0$, suy ra $C = 0$. Vậy

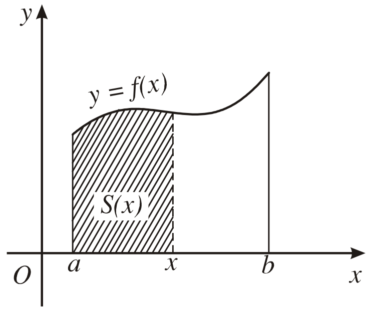
$$S(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình cần tìm là $S(1) = \dfrac{1}{3}$.

Bây giờ, ta xét bài toán tìm diện tích hình thang cong bất kì.

Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, trục hoành và đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$.

Với mỗi $x \in [a ; b]$, kí hiệu $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đó nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với Ox lần lượt tại a và x (H.50).



Hình 50

Ta cũng chứng minh được $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$.

Giả sử $F(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ thì có một hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$.

Vì $S(a) = 0$ nên $F(a) + C = 0$ hay $C = -F(a)$.

Vậy $S(x) = F(x) - F(a)$.

Thay $x = b$ vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình thang cần tìm là

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

2. Định nghĩa tích phân

2

Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$, $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$. Chứng minh rằng $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$, (tức là hiệu số $F(b) - F(a)$ không phụ thuộc việc chọn nguyên hàm).

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Ta còn dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$.

Vậy $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$

Ta gọi $\int_a^b$ là *dấu tích phân, a là cận dưới*, b là *cận trên*, $f(x)\mathrm{d}x$ là *biểu thức dưới dấu tích phân* và $f(x)$ là *hàm số dưới dấu tích phân.*

CHÚ Ý

Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0\ ;\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Ví dụ 2

1) $\int_1^2 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3\ ;$

2) $\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln t\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

NHẬN XÉT

a) Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hay $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t.

b) *Ý nghĩa hình học của tích phân*. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.47a). Vậy

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.}$$

II – TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

TÍNH CHẤT 1

$$\boxed{\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \qquad (k \text{ là hằng số}).$$

TÍNH CHẤT 2

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.}$$

3

Hãy chứng minh các tính chất 1 và 2.

Ví dụ 3. Tính $\int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\int_1^4 (x^2 + 3\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_1^4 x^2\mathrm{d}x + 3\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^4 + 3\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{4^3 - 1}{3} + 2(2^3 - 1) = 35.$$

TÍNH CHẤT 3

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x} \qquad (a < c < b).$$

Chứng minh. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Khi đó, $F(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên mỗi đoạn $[a\ ;\ c]$ và $[c\ ;\ b]$. Do đó, ta có

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

Ví dụ 4. Tính $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\mathrm{d}x$.

Giải. Ta có

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x.$$

Vì $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, & \text{nếu } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$

nên

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\mathrm{d}x = \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} |\sin x|\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[(-\cos x)\Big|_0^{\pi} + (\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 4\sqrt{2}.$$

III – PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

4

Cho tích phân $I = \int\limits_0^1 (2x+1)^2 \mathrm{d}x$.

1. Tính I bằng cách khai triển $(2x+1)^2$.

2. Đặt $u = 2x+1$. Biến đổi biểu thức $(2x+1)^2 \mathrm{d}x$ thành $g(u)\mathrm{d}u$.

3. Tính $\int\limits_{u(0)}^{u(1)} g(u)\mathrm{d}u$ và so sánh kết quả với I trong câu 1.

Tương tự phương pháp đổi biến số trong việc tính nguyên hàm, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha\,;\,\beta]$(*) sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b$ với mọi $t \in [\alpha\,;\,\beta]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ví dụ 5. Tính $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Ta có $x'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

Các giả thiết của định lí trên được thoả mãn. Do đó

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

(*) Nếu $\beta < \alpha$, ta xét đoạn $[\beta\,;\,\alpha]$.

CHÚ Ý

Trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng phép đổi biến số ở dạng sau :

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Để tính $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, đôi khi ta chọn hàm số $u = u(x)$ làm biến số mới, trong đó trên đoạn $[a\ ;\ b]$, $u(x)$ có đạo hàm liên tục và $u(x) \in [\alpha\ ;\ \beta]$.

Giả sử có thể viết

$$f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a; b],$$

với $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha\ ;\ \beta]$.

Khi đó, ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u.$$

Ví dụ 6. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = \sin x$. Ta có $u' = \cos x$.

Khi $x = 0$ thì $u(0) = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int_0^1 u^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 7. Tính $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = 1 + x^2$, ta có $u' = 2x$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$ nên

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u^3}\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}.\frac{1}{u^2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) = \frac{3}{16}.$$

2. Phương pháp tính tích phân từng phần

5

a) Hãy tính $\int (x+1)e^x \mathrm{d}x$ bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

b) Từ đó tính $\int_0^1 (x+1)e^x \mathrm{d}x$.

Tương tự phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

hay $$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Ví dụ 8. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$.

Giải. Đặt $u = x$ và $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và $v = -\cos x$. Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1.$$

Ví dụ 9. Tính $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

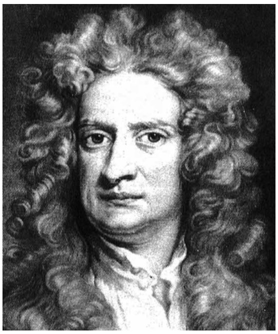
Giải. Đặt $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $v = -\frac{1}{x}$. Do đó

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0-1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

BẠN CÓ BIẾT

NIU-TƠN (I.NEWTON)



I. Newton
(1643 – 1727)

Niu-tơn là nhà toán học, vật lí học, cơ học và thiên văn học vĩ đại người Anh.

Sinh ra thiếu tháng, Niu-tơn là một đứa trẻ yếu ớt. Lớn lên Niu-tơn cũng không phải là một cậu bé khoẻ mạnh. Cậu thường phải tránh những trò chơi hiếu động của đám bạn bè cùng lứa tuổi. Thay vào đó, cậu tự sáng chế ra những trò chơi cho riêng mình, qua đó cũng thấy được tài năng thực nghiệm của Niu-tơn sớm được bộc lộ. Khi thì cậu làm ra những đồ chơi cơ học, như chiếc đồng hồ bằng gỗ chạy được, khi thì cậu sáng chế ra chiếc cối xay gió, bên trong để một con chuột đóng vai trò người thợ xay. Có lần vào ban đêm Niu-tơn đã thả chiếc diều mang đèn lồng chiếu sáng, khiến cho dân làng hoảng sợ. Và ngay từ lúc nhỏ, Niu-tơn đã rất chịu khó đọc sách và ghi chép cẩn thận những điều lí thú mà cậu đọc được trong sách.

Năm 1661, 18 tuổi, Niu-tơn vào học tại trường Đại học Cam-brit (Cambridge). Từ đó Niu-tơn thực sự quan tâm đến khoa học. Thầy dạy toán của Niu-tơn thừa nhận cậu sinh viên xuất sắc đã vượt mình và năm 1669 ông nhường chức vụ giáo sư cho người học trò lỗi lạc ấy. Niu-tơn giữ chức này cho đến năm 1701.

Cống hiến lớn lao của Niu-tơn đối với toán học là đồng thời và độc lập với Lai-bơ-nit (G. Leibniz), ông đã sáng lập ra phép tính vi phân và tích phân. Ngay từ những năm 1665 – 1666, lúc 22, 23 tuổi, Niu-tơn đã xây dựng cơ sở của phép tính này mà ông gọi là "phương pháp thông lượng", và ông đã áp dụng phương pháp đó để giải những bài toán về Cơ học.

Niu-tơn và Lai-bơ-nit đều phát hiện ra mối liên hệ sâu sắc giữa tích phân và nguyên hàm. Lịch sử Toán học cho thấy khái niệm tích phân đã xuất hiện độc lập với đạo hàm và nguyên hàm. Do đó, việc thiết lập mối liên hệ giữa tích phân với nguyên hàm là một phát minh của Niu-tơn và Lai-bơ-nit.

Niu-tơn đã có những phát minh cơ bản về dãy vô hạn. Đặc biệt, ông mở rộng định lí, nay gọi là "định lí nhị thức Niu-tơn" cho trường hợp số mũ là một số thực tuỳ ý.

Niu-tơn còn có những cống hiến lớn lao trong các lĩnh vực Đại số, Hình học, Cơ học và Vật lí. Ông đã phát minh ra định luật vĩ đại về vạn vật hấp dẫn.

Bài tập

1. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{2} x(x+1)^2\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-3x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \cos 5x\,\mathrm{d}x$.

2. Tính các tích phân sau :

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} |1-x|\,\mathrm{d}x$;

b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{2x+1}+1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin 2x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

3. Sử dụng phương pháp đổi biến số, hãy tính :

a) $\int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$ (đặt $u = x + 1$) ;

b) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$ (đặt $x = \sin t$) ;

c) $\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1 + xe^x} \mathrm{d}x$ (đặt $u = 1 + xe^x$) ;

d) $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x$ $(a > 0)$ (đặt $x = a\sin t$).

4. Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x \mathrm{d}x$;

b) $\int_1^e x^2 \ln x \mathrm{d}x$;

c) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^1 (x^2 - 2x - 1)e^{-x}\mathrm{d}x$.

5. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 (1+3x)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x$;

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \mathrm{d}x$;

c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} \mathrm{d}x$.

6. Tính $\int_0^1 x(1-x)^5 \mathrm{d}x$ bằng hai phương pháp :

a) Đổi biến số $u = 1 - x$;

b) Tính tích phân từng phần.

§3 ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

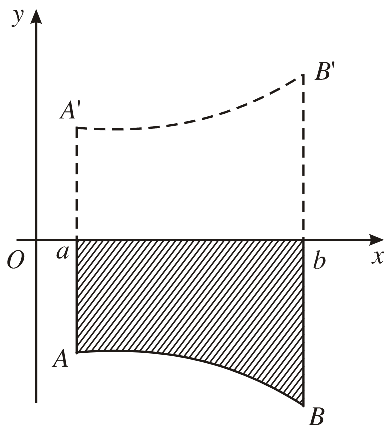
I - TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1

Tính diện tích hình thang vuông được giới hạn bởi các đường thẳng $y = -2x - 1$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 5$.

So sánh với diện tích hình thang vuông trong 1 của §2.

1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành



Hình 51

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị không âm trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Ta đã biết hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ có diện tích S được tính theo công thức

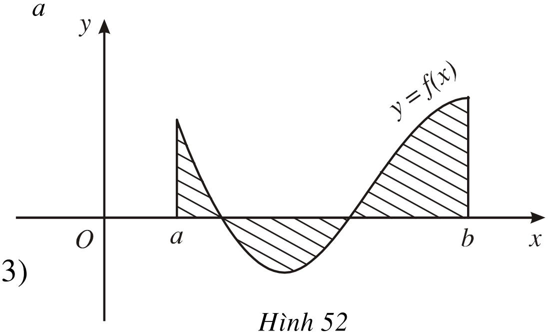
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Trường hợp $f(x) \le 0$ trên đoạn $[a\ ;\ b]$, ta có $-f(x) \ge 0$ và diện tích hình thang cong $aABb$ bằng diện tích hình thang cong $aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành (H.51). Do đó

$$S = S_{aABb} = S_{aA'B'b} = \int_a^b (-f(x))\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Tổng quát, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.52) được tính theo công thức

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.} \qquad (3)$$



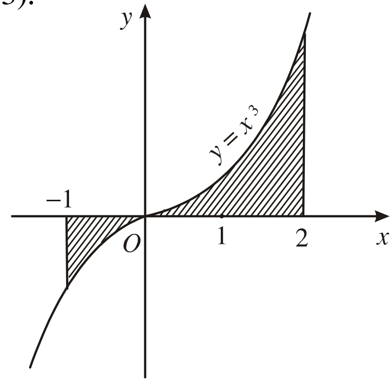
Hình 52

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ (H.53).

Giải. Ta có $x^3 \leq 0$ trên đoạn $[-1 ; 0]$ và $x^3 \geq 0$ trên đoạn $[0 ; 2]$. Áp dụng công thức (3), ta có :

$$S = \int_{-1}^{2} |x^3| \, dx = \int_{-1}^{0} (-x^3) \, dx + \int_{0}^{2} x^3 \, dx$$

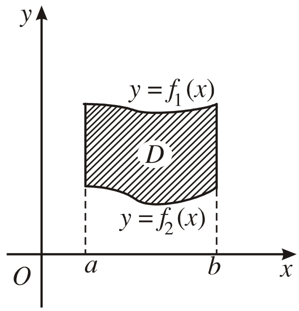
$$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{17}{4}.$$



Hình 53

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ (H.54).



Hình 54

Xét trường hợp $f_1(x) \geq f_2(x)$ với mọi $x \in [a ; b]$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình thang cong giới hạn bởi trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và các đường cong $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ tương ứng. Khi đó, diện tích S của hình D là

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Trong trường hợp tổng quát, người ta chứng minh được công thức

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.} \qquad (4)$$

CHÚ Ý

Khi áp dụng công thức (4), cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy, ta giải phương trình

$f_1(x) - f_2(x) = 0$ trên đoạn $[a ; b]$. Giả sử phương trình có hai nghiệm c, d ($c < d$). Khi đó, $f_1(x) - f_2(x)$ không đổi dấu trên các đoạn $[a ; c]$, $[c ; d]$, $[d ; b]$. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[a ; c]$, ta có

$$\int_a^c |f_1(x) - f_2(x)| \mathrm{d}x = \left| \int_a^c [f_1(x) - f_2(x)] \mathrm{d}x \right|.$$

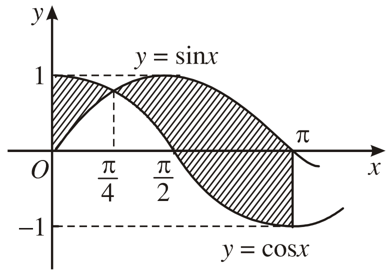
Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ và đồ thị của hai hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$ (H.55).

Giải. Đặt $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$.

Ta có $f_1(x) - f_2(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0 ; \pi].$$



Hình 55

Vậy diện tích của hình phẳng đã cho là

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos x - \sin x| \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\cos x - \sin x| \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \sin x) \mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| (\sin x + \cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right| = 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

Giải. Ta có

$$f_1(x) - f_2(x) = (x^3 - x) - (x - x^2) = x^3 + x^2 - 2x.$$

Phương trình $f_1(x) - f_2(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là

$$S = \int_{-2}^{1} \left|x^3 + x^2 - 2x\right| dx = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\, dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}\right| + \left|\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}\right| = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

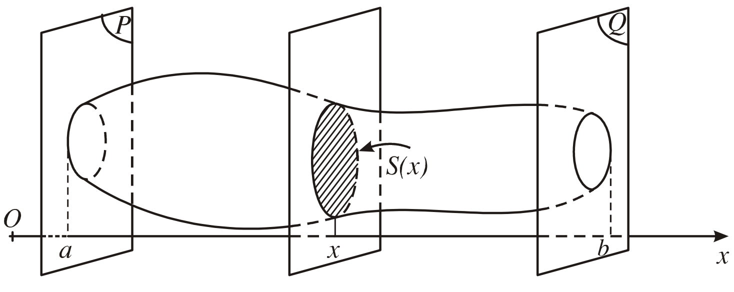
II - TÍNH THỂ TÍCH

2

Hãy nhắc lại công thức tính thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.

1. Thể tích của vật thể

Cắt một vật thể $\mathcal{V}$ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a$, $x = b$ $(a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại điểm x $(a \leq x \leq b)$ cắt $\mathcal{V}$ theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (H.56). Giả sử $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$.



Hình 56

Người ta chứng minh được rằng thể tích V của phần vật thể $\mathcal{V}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức :

$$\boxed{V = \int_{a}^{b} S(x)\, dx.} \qquad (5)$$

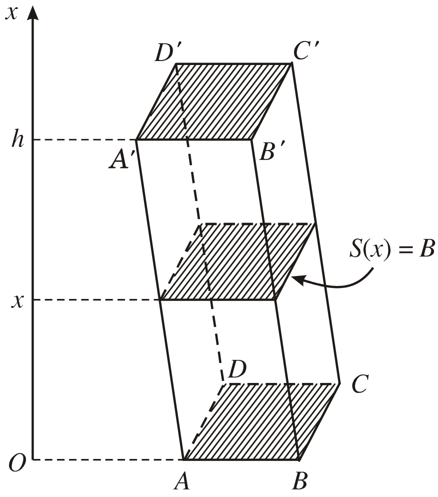
Ví dụ 4. Tính thể tích khối lăng trụ, biết diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.

Giải. Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ, còn hai đáy nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = 0$ và $x = h$ (H.57).

Hiển nhiên, một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với trục Ox, cắt lăng trụ theo thiết diện có diện tích không đổi $S(x) = B$ $(0 \le x \le h)$.

Áp dụng công thức (5), ta có

$$V = \int_0^h S(x)\mathrm{d}x = \int_0^h B\mathrm{d}x = Bx\Big|_0^h = Bh.$$



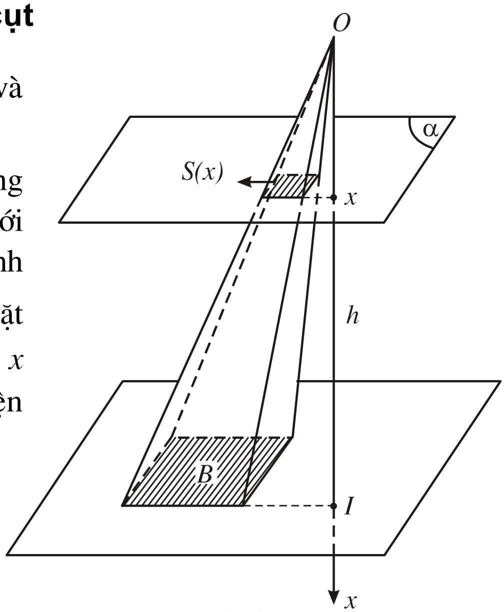
Hình 57

2. Thể tích khối chóp và khối chóp cụt

a) Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B.

Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$. Khi đó $OI = h$. Một mặt phẳng (α) vuông góc với Ox tại x $(0 \le x \le h)$ cắt khối chóp theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (H.58). Ta có

$$S(x) = B\frac{x^2}{h^2}.$$



Hình 58

Khi đó, thể tích V của khối chóp là

$$V = \int_0^h B\frac{x^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{B}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{Bh}{3}.$$

b) Cho khối chóp cụt tạo bởi khối chóp đỉnh S có diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao bằng h.

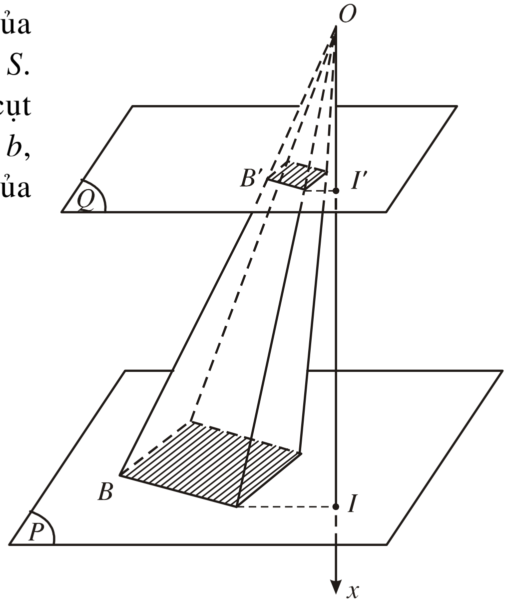
Chọn trục Ox trùng với đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt cắt Ox tại I và I' (H.59). Đặt $OI = b$, $OI' = a$ $(a < b)$. Gọi V là thể tích của khối chóp cụt. Ta có

$$V = \int_a^b B\frac{x^2}{b^2}\mathrm{d}x = \frac{B}{3b^2}(b^3 - a^3)$$

$$= B\frac{b-a}{3}\cdot\frac{a^2 + ab + b^2}{b^2}.$$

Vì $B' = B\dfrac{a^2}{b^2}$ và $h = b - a$ nên

$$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{BB'} + B').$$



Hình 59

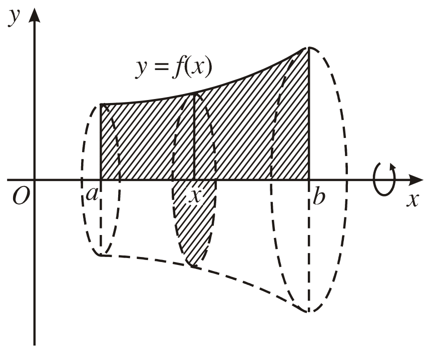
III – THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

3
Nhắc lại khái niệm mặt tròn xoay và khối tròn xoay trong hình học.

Nghệ nhân làng gốm Bát Tràng

Bài toán

Giả sử một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ quay xung quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay (H.60). Hãy tính thể tích V của nó.



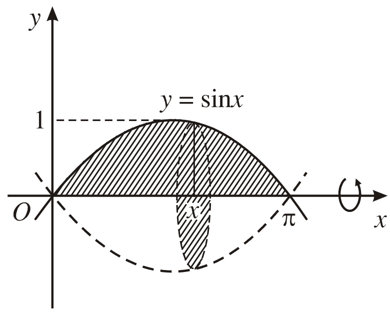
Hình 60

Giải. Thiết diện của khối tròn xoay trên tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x \in [a\,;\,b]$ là hình tròn có bán kính bằng $|f(x)|$. Do đó, diện tích của thiết diện là $S(x) = \pi f^2(x)$. Vậy theo công thức (5) ta có

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.} \qquad (6)$$

Ví dụ 5. Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ (H.61).

Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox.



Hình 61

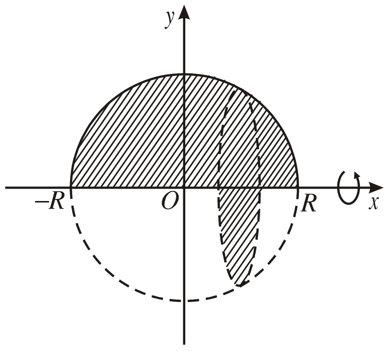
Giải. Áp dụng công thức (6), ta có

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ví dụ 6. Tính thể tích hình cầu bán kính R.

Giải. Hình cầu bán kính R là khối tròn xoay thu được khi quay nửa hình tròn giới hạn bởi đường $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$ và đường thẳng $y = 0$ xung quanh trục Ox (H.62).



Hình 62

Vậy $V = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$

$$= \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Bài tập

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $y = x^2$, $y = x + 2$; b) $y = |\ln x|$, $y = 1$; c) $y = (x - 6)^2$, $y = 6x - x^2$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm $M(2 ; 5)$ và trục Oy.

3. Parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành hai phần. Tìm tỉ số diện tích của chúng.

4. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox :

a) $y = 1 - x^2$, $y = 0$;

b) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

c) $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

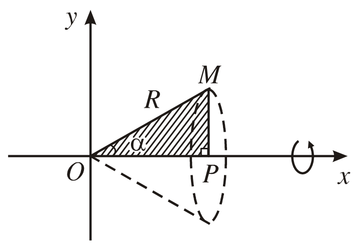
5. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox. Đặt

$$\widehat{POM} = \alpha,\ OM = R\ \left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3}, R > 0\right).$$

Gọi $\mathcal{V}$ là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox (H.63).

a) Tính thể tích của $\mathcal{V}$ theo α và R.

b) Tìm α sao cho thể tích của $\mathcal{V}$ lớn nhất.



Hình 63

BẠN CÓ BIẾT

LỊCH SỬ PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Phép tính tích phân đã được các nhà bác học sử dụng từ trước thế kỉ XVIII. Đến thế kỉ XIX, Cô-si (Cauchy, 1789 – 1857) và Ri-man (Riemann, 1826 – 1866) mới xây dựng được một lí thuyết chính xác về tích phân. Lí thuyết này về sau được Lơ-be-gơ (Lebesgue, 1875 – 1941) và Đăng-gioa (Denjoy, 1884 – 1974) hoàn thiện.

Để định nghĩa tích phân, các nhà toán học ở thế kỉ XVII và XVIII không dùng đến khái niệm giới hạn. Thay vào đó, họ nói "tổng của một số vô cùng lớn những số hạng vô cùng nhỏ". Chẳng hạn, diện tích của hình thang cong là tổng của một số vô cùng lớn những diện tích của những hình chữ nhật vô cùng nhỏ. Dựa trên cơ sở này, Kê-ple (Kepler, 1571 – 1630) đã tính một cách chính xác nhiều diện tích và thể tích. Các nghiên cứu này được Ca-va-li-ơ-ri (Cavalierie,1598 – 1647) tiếp tục phát triển.

Dưới dạng trừu tượng, tích phân đã được Lai-bơ-nit định nghĩa và đưa vào kí hiệu $\int$. Tên gọi "tích phân" do Bec-nu-li (Jacob Bernoulli, 1654 – 1705), học trò của Lai-bơ-nit đề xuất.

Như vậy, tích phân đã xuất hiện độc lập với đạo hàm và nguyên hàm. Do đó, việc thiết lập liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm là một phát minh vĩ đại của Niu-tơn và Lai-bơ-nit.

Khái niệm hiện đại về tích phân, xem như giới hạn của các tổng tích phân, là của Cô-si và Ri-man.

BÀI ĐỌC THÊM

TÍNH DIỆN TÍCH BẰNG GIỚI HẠN

1. Tính diện tích hình thang cong

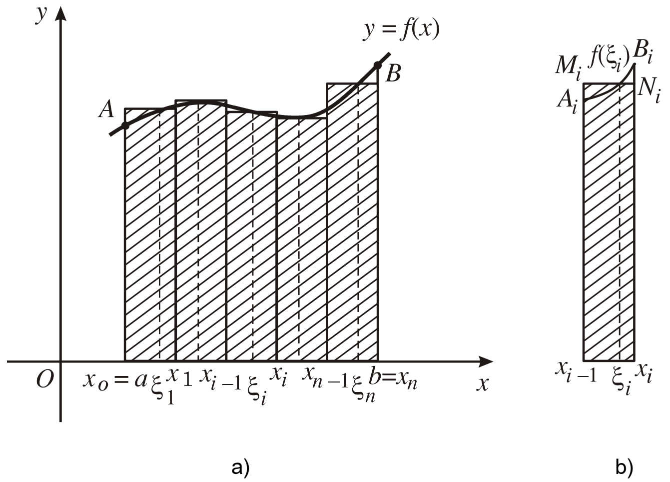
Xét hình thang cong giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a ; b]$.

Để xác định diện tích của hình thang cong trên. Ta dùng phép chia nhỏ, xấp xỉ bởi một hình bậc thang và chuyển qua giới hạn.

Ta chia đoạn $[a ; b]$ thành n phần tuỳ ý bởi các điểm x_0, x_1, ..., x_n sao cho

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Từ các điểm chia, vẽ các đường thẳng song song với trục Oy, tương ứng chia hình thang cong thành n hình thang cong nhỏ (H.64a).



Hình 64

Tại mỗi hình thang cong $x_{i-1}A_iB_ix_i$, ta dựng một hình chữ nhật có đáy là đoạn $[x_{i-1}\,;\,x_i]$ và chiều cao bằng $f(\xi_i)$ với ξ_i lấy tuỳ ý trên đoạn $[x_{i-1}\,;\,x_i]$ (H.64b). Hình chữ nhật nhận được $x_{i-1}M_iN_ix_i$ có diện tích bằng

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Số này xấp xỉ diện tích hình thang cong $x_{i-1}A_iB_ix_i$.

Kí hiệu *S* là diện tích hình thang cong $aABb$ cần tìm, ta có

$$S \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

hay
$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (1)$$

Xấp xỉ này càng chính xác nếu tất cả các hiệu số $x_i - x_{i-1}$ càng nhỏ. Sự kiện này gợi ý cho ta về phép chuyển qua giới hạn khi $\max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$ dần tới 0 để thu được diện tích hình thang cong $aABb$.

Xét

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{khi} \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0. \qquad (2)$$

Người ta chứng minh được rằng nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ thì giới hạn (2) luôn tồn tại không phụ thuộc cách chia đoạn $[a\,;\,b]$ và cách lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}\,;\,x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Ta coi giới hạn ấy là **diện tích** của hình thang cong đã cho.

Vậy $S = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ khi $\max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \to 0.$ (3)

Giới hạn này chính là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

2. Áp dụng

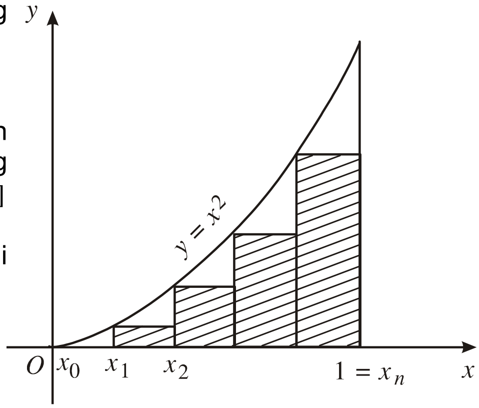
Nhờ giới hạn dạng (3), ta có thể tính được diện tích một số hình phẳng.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường

$$y = x^2, y = 0, x = 0 \text{ và } x = 1.$$

Giải. Ta tiến hành theo phương pháp trên nhưng chia đoạn $[a ; b]$ thành n phần bằng nhau, tức là độ dài các đoạn $[x_{i-1} ; x_i]$ bằng $\frac{1}{n}$. Điểm ξ_i được chọn là mút trái của đoạn $[x_{i-1} ; x_i]$, $\xi_i = x_{i-1}$. Khi đó

$$f(\xi_i) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\ i = 1, 2, ..., n \text{ (H.65)}.$$



Hình 65

Ta lập tổng dạng (1)

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + ... + (n-1)^2) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Vậy $S = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$

(vì chia đều đoạn $[a ; b]$ nên $\max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$).

Ví dụ 2. Tính diện tích hình tròn bán kính R.

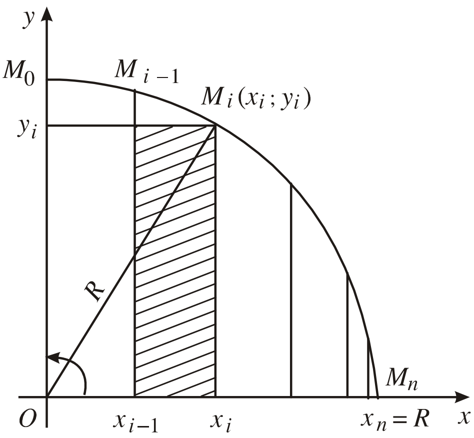
Giải. Vì diện tích hình tròn không phụ thuộc vị trí của nó trong mặt phẳng Oxy nên để xác định, ta giả sử tâm hình tròn trùng với gốc toạ độ. Hình tròn đối xứng qua tâm, nên ta chỉ cần tính diện tích của phần nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng toạ độ.

Hình tròn được giới hạn bởi đường tròn có phương trình là $x^2 + y^2 = R^2$. Ta có thể viết phương trình này ở dạng tham số

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Ta tính diện tích phần tư hình tròn được giới hạn bởi cung tròn $x = R\cos t,\quad y = R\sin t$ $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ và hai trục toạ độ $x = 0$ và $y = 0$.

Ta chia đoạn [0 ; R] trên trục hoành thành n phần bởi các điểm x_i (i = 0, ..., n) sao cho các điểm M_i (i = 0, ..., n) tương ứng chia cung tròn thành n phần bằng nhau. Khi đó, số đo các cung nhỏ đều bằng $\dfrac{\pi}{2n}$. Điểm ξ_i được chọn trùng với x_i (mút phải đoạn $[x_{i-1}\,;\,x_i]$) (H.66). Ta có



Hình 66

$$\begin{cases} x_i = R\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - i\dfrac{\pi}{2n}\right) \\ y_i = R\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i\dfrac{\pi}{2n}\right) \end{cases} (i = 1, 2, ..., n).$$

$x_0 = 0,\ y_0 = R.$

Lập tổng dạng (1), ta được

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2n}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - (i-1)\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

$$= 2R^2 \sum_{i=1}^{n} \sin(n-i)\frac{\pi}{2n}.\sin(2n-2i+1)\frac{\pi}{4n}.\ \sin\frac{\pi}{4n}$$

$$= 2R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\sin(n-1)\frac{\pi}{2n}.\sin(2n-1)\frac{\pi}{4n} + \right.$$

$$\left. + \sin(n-2)\frac{\pi}{2n}\sin(2n-3)\frac{\pi}{4n} + ... + \sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{4n}\right]$$

$$= R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos(4n-3)\frac{\pi}{4n}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos(4n-7)\frac{\pi}{4n}\right) + \right.$$

$$\left. + ... + \left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos 5\frac{\pi}{4n}\right)\right]$$

$$= R^2 \cos\frac{\pi}{4n}.(n-1)\sin\frac{\pi}{4n} -$$

$$- R^2 \sin\frac{\pi}{4n}\left[\cos 5\frac{\pi}{4n} + \cos 9\frac{\pi}{4n} + ... + \cos(4n-3)\frac{\pi}{4n}\right].$$

Vì $\cos 5x + \cos 9x + ... + \cos(4n-3)x = \dfrac{\sin(4n-1)x - \sin 3x}{2\sin 2x}$, nên tổng trên viết thành

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = R^2\cos\frac{\pi}{4n}.(n-1)\sin\frac{\pi}{4n} - R^2\sin\frac{\pi}{4n}\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n}}{2\sin\frac{2\pi}{4n}}$$

$$= R^2\cos\frac{\pi}{4n}.(n-1)\sin\frac{\pi}{4n} - R^2.\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n}}{4\cos\frac{\pi}{4n}}.$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên khi $n \to +\infty$ (vì $\max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$), ta được

$$S = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[R^2\cos\frac{\pi}{4n}.\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} - R^2\,\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n}}{4\cos\frac{\pi}{4n}}\right] = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Vậy diện tích hình tròn bằng πR^2.

Ôn tập chương III

1. a) Phát biểu định nghĩa nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên một khoảng.

b) Nêu phương pháp tính nguyên hàm từng phần. Cho ví dụ minh hoạ.

2. a) Phát biểu định nghĩa tích phân của hàm số $f(x)$ trên một đoạn.

b) Nêu các tính chất của tích phân. Cho ví dụ minh hoạ.

3. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = (x - 1)(1 - 2x)(1 - 3x)$; b) $f(x) = \sin 4x\cos^2 2x$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$; d) $f(x) = (e^x - 1)^3$.

4. Tính :

a) $\int (2 - x)\sin x\,dx$; b) $\int \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$;

c) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}\mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

g) $\int \frac{1}{(1+x)(2-x)}\mathrm{d}x$.

5. Tính :

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$;

b) $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^2 x^2e^{3x}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$;

6. Tính :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\sin^2 x\mathrm{d}x$;

b) $\int_{-1}^{1} \left|2^x-2^{-x}\right|\mathrm{d}x$;

c) $\int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^2\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{\pi} (x+\sin x)^2\mathrm{d}x$.

7. Xét hình phẳng D giới hạn bởi $y = 2\sqrt{1-x^2}$ và $y = 2(1-x)$.

a) Tính diện tích hình D.

b) Quay hình D xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

Bài tập trắc nghiệm

1. Tính $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$, kết quả là :

(A) $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$; (B) $C\sqrt{1-x}$; (C) $-2\sqrt{1-x}+C$; (D) $\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C$.

2. Tính $\int 2^{\sqrt{x}} \dfrac{\ln 2}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$, kết quả **sai** là :

(A) $2^{\sqrt{x}+1} + C$; (B) $2\left(2^{\sqrt{x}} - 1\right) + C$;

(C) $2\left(2^{\sqrt{x}} + 1\right) + C$; (D) $2^{\sqrt{x}} + C$.

3. Tích phân $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x$ bằng :

(A) $-\dfrac{2}{3}$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) $\dfrac{3}{2}$; (D) 0.

4. Cho hai tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, hãy chỉ ra khẳng định đúng :

(A) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x > \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$; (B) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$;

(C) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$; (D) Không so sánh được.

5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong

a) $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng :

(A) 0 ; (B) –4 ; (C) $\dfrac{1}{6}$; (D) 2.

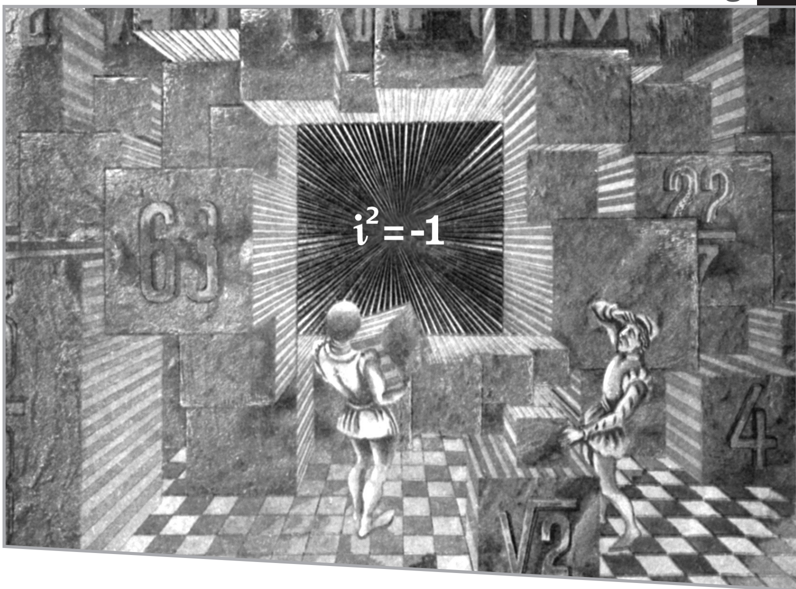
b) $y = x + \sin x$ và $y = x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ bằng :

(A) –4 ; (B) 4 ; (C) 0 ; (D) 1.

6. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng :

(A) 0 ; (B) $-\pi$; (C) π ; (D) $\dfrac{\pi}{6}$.

Chương IV



SỐ PHỨC

§1 SỐ PHỨC

1. Số i

Ta đã biết các phương trình bậc hai với biệt số âm không có nghiệm thực. Phương trình bậc hai đơn giản nhất không có nghiệm thực là phương trình

$$x^2 + 1 = 0.$$

Với mong muốn mở rộng tập hợp số thực để mọi phương trình bậc n đều có nghiệm, người ta đưa ra một số mới, kí hiệu là i và coi nó là nghiệm của phương trình trên. Như vậy

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

2. Định nghĩa số phức

> Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một **số phức**.
>
> Đối với số phức $z = a + bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z.
>
> Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1. Các số sau là những số phức :

$2 + 5i$; $-\sqrt{2} + 3i$; $1 + (-3)i$ (còn viết là $1 - 3i$); $1 + \sqrt{3}i$ (còn viết là $1 + i\sqrt{3}$).

1

Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau : $-3+5i,\ 4-i\sqrt{2},\ 0+\pi i,\ 1 + 0i$.

3. Số phức bằng nhau

Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$\boxed{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d.}$$

__Ví dụ 2.__ Tìm các số thực x và y, biết

$$(2x+1)+(3y-2)i=(x+2)+(y+4)i.$$

__Giải__. Từ định nghĩa của hai số phức bằng nhau, ta có

$$2x+1=x+2 \text{ và } 3y-2=y+4.$$

Vậy $x = 1$ và $y = 3$.

CHÚ Ý

• Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0

$a=a+0i.$

Như vậy, *mỗi số thực cũng là một số phức*. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• Số phức $0+bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi

$$bi=0+bi.$$

Đặc biệt $\quad i=0+1i.$

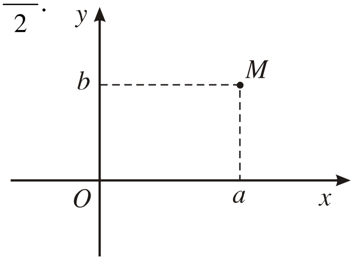
Số i được gọi là **đơn vị ảo**.

2

Viết số phức z có phần thực bằng $\frac{1}{2}$, phần ảo bằng $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Biểu diễn hình học số phức

Như trên đã thấy, mỗi số phức $z=a+bi$ hoàn toàn được xác định bởi cặp số thực $(a\ ;\ b)$.



Hình 67

Điểm $M(a\ ;\ b)$ trong một hệ toạ độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z=a+bi$ (H.67).

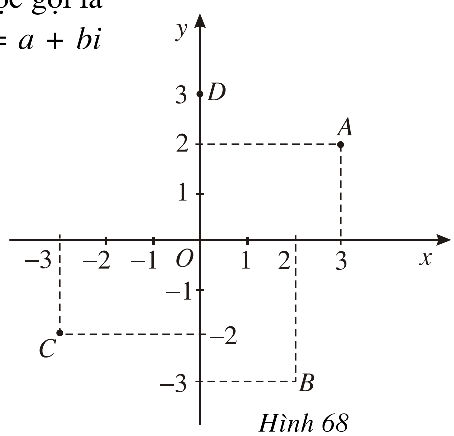
__Ví dụ 3.__ (H.68)

Điểm A biểu diễn số phức $3+2i$;

Điểm B biểu diễn số phức $2-3i$;

Điểm C biểu diễn số phức $-3-2i$;

Điểm D biểu diễn số phức $3i$.



Hình 68

3

a) Biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ các số phức sau : $3 - 2i$, $-4i$, 3.

b) Các điểm biểu diễn số thực, số thuần ảo nằm ở đâu trên mặt phẳng toạ độ ?

5. Môđun của số phức

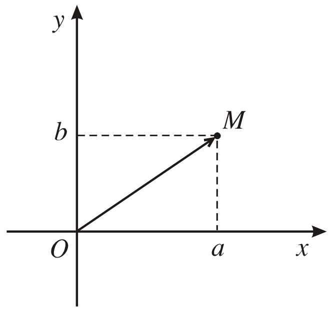
Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a\ ;\ b)$ trên mặt phẳng toạ độ (H.69).

> Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Vậy

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| \text{ hay } |a + bi| = |\overrightarrow{OM}|.$$

Dễ thấy $\boxed{|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$



Hình 69

Ví dụ 4

$$|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}\ ;$$

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

4

Số phức nào có môđun bằng 0 ?

6. Số phức liên hợp

5

Biểu diễn các cặp số phức sau trên mặt phẳng toạ độ và nêu nhận xét :

a) $2 + 3i$ và $2 - 3i$;

b) $-2 + 3i$ và $-2 - 3i$.

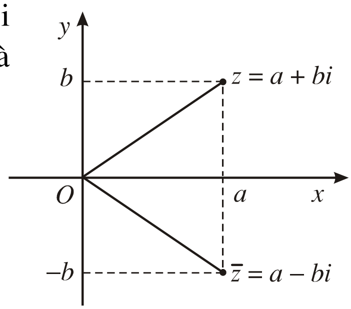
> Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z và kí hiệu là $\overline{z} = a - bi$.

Ví dụ 5

$z = -3 + 2i$; $\quad \overline{z} = -3 - 2i$;

$z = 4 - 3i$; $\quad \overline{z} = 4 + 3i$.

Trên mặt phẳng toạ độ, các điểm biểu diễn z và $\overline{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox (H.70).



Hình 70

6
Cho $z = 3 - 2i$.

a) Hãy tính $\overline{z}$ và $\overline{\overline{z}}$. Nêu nhận xét.

b) Tính $|z|$ và $|\overline{z}|$. Nêu nhận xét.

Từ định nghĩa ta có :

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $|\overline{z}| = |z|$.

BẠN CÓ BIẾT

CÁC- ĐA-NÔ (G.CARDANO)

Các-đa-nô là một nhà bác học người I-ta-li-a. Ông sinh năm 1501, đạt học vị tiến sĩ y khoa năm 1526, nhưng không được hành nghề y mà trở thành thầy giáo dạy toán. Ông có trên 200 công trình về các lĩnh vực Toán học, Y học, Triết học, Thiên văn học, Âm nhạc và Thần học. Năm 1545 ông xuất bản quyển sách "Nghệ thuật lớn của phép giải các phương trình đại số". Trong cuốn sách này, ông trình bày cách giải phương trình bậc ba, bậc bốn và đề cập tới căn bậc hai của số âm. Có thể nói sự nghiên cứu số phức khởi nguồn từ công trình này.

G. Cardano
(1501 – 1576)

Bài tập

1. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z, biết :

a) $z = 1 - \pi i$; b) $z = \sqrt{2} - i$;

c) $z = 2\sqrt{2}$; d) $z = -7i$.

2. Tìm các số thực x và y, biết :

a) $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$;

b) $(1 - 2x) - i\sqrt{3} = \sqrt{5} + (1 - 3y)i$;

c) $(2x + y) + (2y - x)i = (x - 2y + 3) + (y + 2x + 1)i$.

3. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện :

a) Phần thực của z bằng -2 ;

b) Phần ảo của z bằng 3 ;

c) Phần thực của z thuộc khoảng $(-1 ; 2)$;

d) Phần ảo của z thuộc đoạn $[1 ; 3]$;

e) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn $[-2 ; 2]$.

4. Tính $|z|$ với :

a) $z = -2 + i\sqrt{3}$; b) $z = \sqrt{2} - 3i$;

c) $z = -5$; d) $z = i\sqrt{3}$.

5. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện :

a) $|z| = 1$; b) $|z| \leq 1$;

c) $1 < |z| \leq 2$; d) $|z| = 1$ và phần ảo của z bằng 1.

6. Tìm $\overline{z}$, biết :

a) $z = 1 - i\sqrt{2}$; b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$;

c) $z = 5$; d) $z = 7i$.

§2 CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC

1. Phép cộng và phép trừ

1

Theo quy tắc cộng, trừ đa thức (coi i là biến), hãy tính :

$(3+2i)+(5+8i)$;

$(7+5i)-(4+3i)$.

Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ đa thức.

Ví dụ 1

$$(5+2i)+(3+7i)=(5+3)+(2+7)i=8+9i\ ;$$

$$(1+6i)-(4+3i)=(1-4)+(6-3)i=-3+3i.$$

Tổng quát

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\ ;\\&(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.\end{aligned}}$$

2. Phép nhân

2

Theo quy tắc nhân đa thức với chú ý $i^2=-1$, hãy tính $(3+2i)(2+3i)$.

Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức rồi thay $i^2=-1$ trong kết quả nhận được.

Ví dụ 2

$$(5+2i)(4+3i)=20+15i+8i+6i^2=(20-6)+(15+8)i=14+23i\ ;$$

$$\begin{aligned}(2-3i)(6+4i)&=12+8i-18i-12i^2=12+8i-18i+12\\&=(12+12)+(8-18)i=24-10i.\end{aligned}$$

Tổng quát

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd.$$

Vậy

$$\boxed{(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.}$$

CHÚ Ý

Phép cộng và phép nhân các số phức có tất cả các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực.

3

Hãy nêu các tính chất của phép cộng và phép nhân số phức.

Bài tập

1. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(3-5i)+(2+4i)$;

b) $(-2-3i)+(-1-7i)$;

c) $(4+3i)-(5-7i)$;

d) $(2-3i)-(5-4i)$.

2. Tính $\alpha + \beta,\ \alpha - \beta$ với :

a) $\alpha = 3,\ \beta = 2i$; b) $\alpha = 1 - 2i,\ \beta = 6i$;

c) $\alpha = 5i,\ \beta = -7i$; d) $\alpha = 15,\ \beta = 4 - 2i$.

3. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(3 - 2i)(2 - 3i)$; b) $(-1 + i)(3 + 7i)$;

c) $5(4 + 3i)$; d) $(-2 - 5i).4i$.

4. Tính $i^3,\ i^4,\ i^5$.

Nêu cách tính i^n với n là một số tự nhiên tuỳ ý.

5. Tính :

a) $(2 + 3i)^2$; b) $(2 + 3i)^3$.

§3 PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1. Tổng và tích của hai số phức liên hợp

1

Cho $z = 2 + 3i$. Hãy tính $z + \overline{z}$ và $z.\overline{z}$. Nêu nhận xét.

Cho số phức $z = a + bi$. Ta có :

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \ ;$$

$$z.\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 .$$

• *Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.*

• *Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng bình phương môđun của số phức đó.*

Vậy tổng và tích của hai số phức liên hợp là một số thực.

2. Phép chia hai số phức

Chia số phức $c + di$ cho số phức $a + bi$ khác 0 là tìm số phức z sao cho $c + di = (a + bi)z$. Số phức z được gọi là *thương* trong phép chia $c + di$ cho $a + bi$ và kí hiệu là

$$z = \frac{c + di}{a + bi}.$$

Ví dụ 1. Thực hiện phép chia $4 + 2i$ cho $1 + i$.

Giải. Giả sử $z = \frac{4 + 2i}{1 + i}$. Theo định nghĩa, ta có $(1 + i)z = 4 + 2i$.

Nhân cả hai vế với số phức liên hợp của $1 + i$, ta được

$$(1 - i)(1 + i)z = (1 - i)(4 + 2i)$$

suy ra $$2.z = 6 - 2i$$

hay $$z = \frac{1}{2}(6 - 2i) = 3 - i.$$

Vậy $$\frac{4 + 2i}{1 + i} = 3 - i.$$

Tổng quát, giả sử $z = \frac{c + di}{a + bi}$. Theo định nghĩa phép chia số phức, ta có

$$(a + bi)z = c + di.$$

Nhân cả hai vế với số phức liên hợp của $a + bi$, ta được

$$(a - bi)\,(a + bi)z = (a - bi)(c + di)$$

hay

$$(a^2 + b^2)z = (ac + bd) + (ad - bc)i.$$

Nhân cả hai vế với số thực $\frac{1}{a^2 + b^2}$, ta được

$$z = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[(ac + bd) + (ad - bc)i\right].$$

Vậy

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i.$$

CHÚ Ý

Trong thực hành, để tính thương $\dfrac{c + di}{a + bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a + bi$.

Ví dụ 2. Thực hiện phép chia $3 + 2i$ cho $2 + 3i$.

Giải

$$\frac{3 + 2i}{2 + 3i} = \frac{(3 + 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{12 - 5i}{13} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i.$$

2

Thực hiện các phép chia sau : $\dfrac{1+i}{2-3i}$; $\dfrac{6+3i}{5i}$.

Bài tập

1. Thực hiện các phép chia sau :

a) $\dfrac{2 + i}{3 - 2i}$; b) $\dfrac{1 + i\sqrt{2}}{2 + i\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{5i}{2 - 3i}$; d) $\dfrac{5 - 2i}{i}$.

2. Tìm nghịch đảo $\dfrac{1}{z}$ của số phức z, biết :

a) $z = 1 + 2i$; b) $z = \sqrt{2} - 3i$; c) $z = i$; d) $z = 5 + i\sqrt{3}$.

3. Thực hiện các phép tính sau :

a) $2i(3 + i)(2 + 4i)$; b) $\dfrac{(1 + i)^2(2i)^3}{-2 + i}$;

c) $3 + 2i + (6 + i)(5 + i)$; d) $4 - 3i + \dfrac{5 + 4i}{3 + 6i}$.

4. Giải các phương trình sau :

a) $(3 - 2i)z + (4 + 5i) = 7 + 3i$; b) $(1 + 3i)z - (2 + 5i) = (2 + i)z$;

c) $\dfrac{z}{4 - 3i} + (2 - 3i) = 5 - 2i$.

§4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của số thực âm

Thế nào là căn bậc hai của số thực dương a ?

Tương tự căn bậc hai của một số thực dương, từ đẳng thức $i^2 = -1$, ta nói i là một căn bậc hai của -1 ; $-i$ cũng là một căn bậc hai của -1, vì $(-i)^2 = -1$. Từ đó, ta xác định được căn bậc hai của các số thực âm, chẳng hạn :

Căn bậc hai của -2 là $\pm i\sqrt{2}$, vì $(\pm i\sqrt{2})^2 = -2$;

Căn bậc hai của -3 là $\pm i\sqrt{3}$, vì $(\pm i\sqrt{3})^2 = -3$;

Căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$, vì $(\pm 2i)^2 = -4$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy :

• Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$;

• Khi $\Delta > 0$, có hai căn bậc hai (thực) của Δ là $\pm\sqrt{\Delta}$ và phương trình có hai nghiệm thực phân biệt, được xác định bởi công thức

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$

• Khi $\Delta < 0$ phương trình không có nghiệm thực vì không tồn tại căn bậc hai thực của Δ.

Tuy nhiên, trong trường hợp $\Delta < 0$, nếu xét trong tập hợp số phức, ta vẫn có hai căn bậc hai thuần ảo của Δ là $\pm i\sqrt{|\Delta|}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ trên tập hợp số phức.

Ta có $\Delta = 1 - 4 = -3$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phức là

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

NHẬN XÉT

Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm (không nhất thiết phân biệt).

Tổng quát, người ta đã chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n ($n \geq 1$)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ đều có n nghiệm phức (các nghiệm không nhất thiết phân biệt).

Đó là định lí cơ bản của Đại số học.

Bài tập

1. Tìm các căn bậc hai phức của các số sau : -7 ; -8 ; -12 ; -20 ; -121.

2. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức :

a) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$; b) $7z^2 + 3z + 2 = 0$; c) $5z^2 - 7z + 11 = 0$.

3. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức :

a) $z^4 + z^2 - 6 = 0$; b) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$.

4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$. Hãy tính $z_1 + z_2$ và $z_1.z_2$ theo các hệ số a, b, c.

5. Cho $z = a + bi$ là một số phức. Hãy tìm một phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và $\overline{z}$ làm nghiệm.

BÀI ĐỌC THÊM

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Phương trình đại số là phương trình dạng

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

trong đó n là một số nguyên dương ; $a_0, a_1, ..., a_n$ là các số đã cho và được gọi là các hệ số của phương trình, x là ẩn số. Nếu $a_0 \neq 0$ thì n là bậc của phương trình.

Việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình đại số và tìm công thức tính nghiệm của nó đã thu hút công sức của nhiều nhà toán học, trong nhiều thế kỉ. Chính từ những nghiên cứu đó đã ra đời ngành Đại số và thúc đẩy sự phát triển của nhiều lĩnh vực toán học khác.

Từ 2000 năm trước Công nguyên, người Ai Cập và người Babilon cổ đã biết giải các phương trình bậc nhất và một số trường hợp riêng của các phương trình bậc hai và bậc ba.

Lí thuyết giải phương trình bậc hai được trình bày lần đầu tiên trong cuốn sách "Số học" của Đi-ô-phăng (Diophantus), nhà bác học cổ Hi Lạp thế kỉ III. Cần chú ý rằng vấn đề có nghiệm của phương trình đại số luôn gắn với sự mở rộng các tập hợp số. Chẳng hạn, phương trình $x + 3 = 0$ không có nghiệm trong tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$, nhưng có nghiệm trong tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Phương trình $3x + 2 = 0$ không có nghiệm trong tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$, nhưng có nghiệm trong tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Tổng quát, trên tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, mọi phương trình bậc nhất đều có nghiệm. Nhờ việc mở rộng từ tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ sang tập hợp các số thực $\mathbb{R}$, một lớp các phương trình bậc hai dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với biệt số $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ có nghiệm.

Công thức xác định nghiệm của phương trình bậc hai

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

đã được biết từ thế kỉ thứ VI và điều đó thúc đẩy các nhà toán học đi tìm công thức tính nghiệm của các phương trình bậc ba, bậc bốn,... Tuy nhiên, phải mười thế kỉ sau (thế kỉ XVI), công thức tính nghiệm của phương trình bậc ba và thuật toán giải phương trình bậc bốn mới được các nhà toán học I-ta-li-a tìm ra.

Nghiệm của phương trình bậc ba

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (*)$$

được cho bởi công thức sau (thường gọi là công thức Các-đa-nô) :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Các-đa-nô đã công bố công thức này năm 1545, trong quyển sách "Nghệ thuật lớn của phép giải các phương trình đại số".

Lẽ tự nhiên, ta coi biểu thức trên có nghĩa khi đại lượng $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ là không âm.

Đại lượng Δ cũng được gọi là biệt số của phương trình (*). Tuy nhiên, dễ chỉ ra những phương trình bậc ba với biệt số $\Delta < 0$, mà vẫn có nghiệm thực. Chẳng hạn, xét phương trình

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm là -3, 1, 2 nhưng biệt số

$$\Delta = \frac{6^2}{4} + \frac{(-7)^3}{27} = -\frac{100}{27} < 0.$$

Điều đó dẫn đến việc thừa nhận rằng biểu thức

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

là có nghĩa và các giá trị của nó là $-3, 1, 2$, mặc dù biểu thức này chứa căn bậc hai của một số thực âm.

Như chúng ta đã thấy, sự thừa nhận có các căn bậc hai của số thực âm, bắt đầu từ việc đặt $i = \sqrt{-1}$ đã dẫn đến sự ra đời của tập hợp các số phức.

Đồng thời với việc sáng tạo ra các số phức, người ta chứng minh được rằng mọi phương trình đại số bậc n $(n \geq 1)$ với hệ số phức đều có n nghiệm phức (các nghiệm không nhất thiết phân biệt).

Như vậy, việc mở rộng các tập hợp số gắn với vấn đề có nghiệm của các phương trình đại số đã dừng lại ở tập hợp các số phức.

Tuy nhiên, các nhà toán học vẫn theo đuổi bài toán tìm công thức nghiệm dưới dạng biểu thức chứa căn thức cho các phương trình bậc lớn hơn hoặc bằng 5.

Gần 300 năm sau khi tìm ra công thức Các-đa-nô, năm 1826, A-ben (Abel), nhà toán học Na Uy đã chứng minh được rằng không có một công thức nghiệm như vậy cho các phương trình bậc lớn hơn hoặc bằng năm với hệ số bằng chữ. Hơn nữa, nhà toán học Pháp Ga-loa (Galois), năm 1830 còn giải được trọn vẹn bài toán : "Trong những điều kiện nào, một phương trình đại số giải được bằng căn thức ?". Công trình thiên tài của Ga-loa đặt nền móng cho sự phát triển của Đại số hiện đại.

Ôn tập chương IV

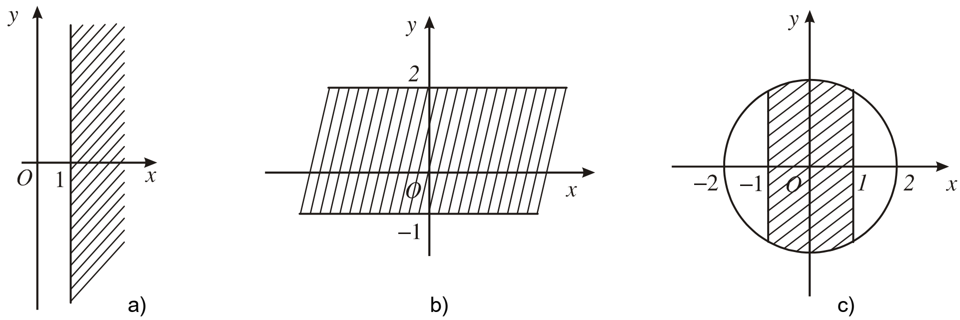
1. Thế nào là phần thực, phần ảo, môđun của một số phức ?

Viết công thức tính môđun của một số phức theo phần thực và phần ảo của nó.

2. Tìm mối liên hệ giữa khái niệm môđun và khái niệm giá trị tuyệt đối của một số thực.

3. Nêu định nghĩa số phức liên hợp của số phức z. Số phức nào bằng số phức liên hợp của nó ?

4. Số phức thoả mãn điều kiện nào thì có điểm biểu diễn ở phần gạch chéo trong các hình 71 a, b, c) ?



Hình 71

5. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện :

a) Phần thực của z bằng 1 ;

b) Phần ảo của z bằng -2 ;

c) Phần thực của z thuộc đoạn $[-1 ; 2]$, phần ảo của z thuộc đoạn $[0 ; 1]$;

d) $|z| \leq 2$.

6. Tìm các số thực x, y sao cho :

a) $3x + yi = 2y + 1 + (2 - x)i$; b) $2x + y - 1 = (x + 2y - 5)i$.

7. Chứng tỏ rằng với mọi số phức z, ta luôn có phần thực và phần ảo của z không vượt quá môđun của nó.

8. Thực hiện các phép tính sau :

a) $(3 + 2i)[(2 - i) + (3 - 2i)]$; b) $(4 - 3i) + \dfrac{1 + i}{2 + i}$;

c) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$; d) $\dfrac{3 + i}{2 + i} - \dfrac{4 - 3i}{2 - i}$.

9. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $(3+4i)z+(1-3i)=2+5i$; b) $(4+7i)z-(5-2i)=6iz$.

10. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $3z^2+7z+8=0$; b) $z^4-8=0$; c) $z^4-1=0$.

11. Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng 3 và tích của chúng bằng 4.

12. Cho hai số phức z_1, z_2. Biết rằng z_1+z_2 và z_1z_2 là hai số thực. Chứng tỏ rằng z_1, z_2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực.

Bài tập trắc nghiệm

1. Số nào trong các số sau là số thực ?

(A) $(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-2i)$; (B) $(2+i\sqrt{5})+(2-i\sqrt{5})$;

(C) $(1+i\sqrt{3})^2$; (D) $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$.

2. Số nào trong các số sau là số thuần ảo ?

(A) $(\sqrt{2}+3i)+(\sqrt{2}-3i)$; (B) $(\sqrt{2}+3i).(\sqrt{2}-3i)$;

(C) $(2+2i)^2$; (D) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$.

3. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau là đúng ?

(A) $i^{1977}=-1$; (B) $i^{2345}=i$; (C) $i^{2005}=1$; (D) $i^{2006}=-i$.

4. Đẳng thức nào trong các đẳng thức sau là đúng ?

(A) $(1+i)^8=-16$; (B) $(1+i)^8=16i$;

(C) $(1+i)^8=16$; (D) $(1+i)^8=-16i$.

5. Biết rằng nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó, trong các kết luận sau, kết luận nào là đúng ?

(A) $z\in\mathbb{R}$; (B) $|z|=1$; (C) z là một số thuần ảo ; (D) $|z|=-1$.

6. Trong các kết luận sau, kết luận nào là **sai** ?

(A) Môđun của số phức z là một số thực ;

(B) Môđun của số phức z là một số phức ;

(C) Môđun của số phức z là một số thực dương ;

(D) Môđun của số phức z là một số thực không âm.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I – Câu hỏi

1. Định nghĩa sự đơn điệu (đồng biến, nghịch biến) của một hàm số trên một khoảng.

2. Phát biểu các điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ đơn điệu trên một khoảng.

3. Phát biểu các điều kiện đủ để hàm số $f(x)$ có cực trị (cực đại, cực tiểu) tại điểm x_0.

4. Nêu sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

5. Nêu định nghĩa và các tính chất cơ bản của lôgarit.

6. Phát biểu các định lí về quy tắc tính lôgarit, công thức đổi cơ số của lôgarit.

7. Nêu tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit, mối liên hệ giữa đồ thị các hàm số mũ và hàm số lôgarit cùng cơ số.

8. Nêu định nghĩa và các phương pháp tính nguyên hàm.

9. Nêu định nghĩa và các phương pháp tính tích phân.

10. Nhắc lại các định nghĩa số phức, số phức liên hợp, môđun của số phức. Biểu diễn hình học của số phức.

II – Bài tập

1. Cho hàm số $f(x) = ax^2 - 2(a + 1)x + a + 2 \quad (a \neq 0)$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thực. Tính các nghiệm đó.

b) Tính tổng S và tích P của các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của S và P theo a.

2. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $a = 0$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

3. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Tìm a và b để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A(1 ; 2)$ và $B(-2 ; -1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với các giá trị tìm được của a và b.

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ và đồ thị (C) xung quanh trục hoành.

4. Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình

$$s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{t^2}{2} - 3t,$$

trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tính $v(2)$, $a(2)$, biết $v(t)$, $a(t)$ lần lượt là vận tốc, gia tốc của chuyển động đã cho.

b) Tìm thời điểm t mà tại đó vận tốc bằng 0.

5. Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$.

a) Tính a, b để hàm số có cực trị bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = 1$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm có tung độ bằng 1.

6. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x + m - 1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $a \neq -1$.

7. Cho hàm số $y = \dfrac{2}{2 - x}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm các giao điểm của (C) và đồ thị của hàm số $y = x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại mỗi giao điểm.

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox.

8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $\left[-2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$;

b) $f(x) = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1\,;\,e]$;

c) $f(x) = xe^{-x}$ trên nửa khoảng $[0\,;\,+\infty)$;

d) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0\,;\,\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

9. Giải các phương trình sau :

a) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$;

b) $(3^x + 2^x)(3^x + 3.2^x) = 8.6^x$;

c) $\log_{\sqrt{3}}(x-2).\log_5 x = 2.\log_3(x-2)$;

d) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0.$

10. Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{2^x}{3^x - 2^x} \le 2$;

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$;

c) $\log^2 x + 3\log x \ge 4$;

d) $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \le \dfrac{1}{4}$.

11. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tính tích phân từng phần :

a) $\displaystyle\int_1^{e^4} \sqrt{x}\ln x\,dx$;

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}dx.$

12. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx$ (đặt $u = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 4x\right)$) ;

b) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{\mathrm{d}x}{9+25x^2}$ (đặt $x = \dfrac{3}{5}\tan t$) ;

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x \,\mathrm{d}x$ (đặt $u = \cos x$) ;

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ (đặt $u = \sqrt{1+\tan x}$).

13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành ;

b) $y = \ln x$, $x = \dfrac{1}{e}$, $x = e$ và trục hoành.

14. Tìm thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = x^3$ xung quanh trục Ox.

15. Giải các phương trình sau trên tập số phức :

a) $(3+2i)z - (4+7i) = 2 - 5i$;

b) $(7-3i)z + (2+3i) = (5-4i)z$;

c) $z^2 - 2z + 13 = 0$;

d) $z^4 - z^2 - 6 = 0$.

16. Trên mặt phẳng toạ độ, hãy tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn bất đẳng thức :

a) $|z| < 2$; b) $|z - i| \le 1$; c) $|z - 1 - i| < 1$.

ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN

CHƯƠNG I

§1.

1. a) Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{3}{2}\ ;+\infty\right)$;

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ -7)$ và $(1\ ;\ +\infty)$, nghịch biến trên $(-7\ ;\ 1)$;

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty\ ;\ -1)$, $(0\ ;\ 1)$;

d) Hàm số đồng biến trên $\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$, $\left(\frac{2}{3}\ ;+\infty\right)$.

2. a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ +\infty)$;

b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ +\infty)$;

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ -4)$, đồng biến trên khoảng $(5\ ;\ +\infty)$;

d) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\ ;-3)$, $(-3\ ;\ 3)$, $(3\ ;\ +\infty)$.

3. HD. Xét dấu y'.

4. HD. Xét dấu y'.

5. HD. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau trên khoảng $\left(0\ ;\frac{\pi}{2}\right)$:

a) $f(x) = \tan x - x$;

b) $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$.

§2.

1. a) $x_{CĐ} = -3$, $x_{CT} = 2$; b) $x_{CT} = 0$;

c) $x_{CĐ} = -1$; $x_{CT} = 1$;

d) $x_{CĐ} = \frac{3}{5}$, $x_{CT} = 1$, $x = 0$ không phải là điểm cực trị ; e) $x_{CT} = \frac{1}{2}$.

2. a) $x_{CĐ} = 0$, $x_{CT} = \pm 1$;

b) $x_{CĐ} = \frac{\pi}{6} + k\pi$,

$x_{CT} = -\frac{\pi}{6} + l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$;

c) $x_{CĐ} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$,

$x_{CT} = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;

d) $x_{CĐ} = -1$, $x_{CT} = 1$.

3. HD. Sử dụng định nghĩa cực trị.

4. HD. Xét dấu y'.

5. $a = -\frac{9}{5}$; $b > \frac{36}{5}$

hoặc $a = \frac{81}{25}$; $b > \frac{400}{243}$.

6. $m = -3$.

§3.

1. a) $\min\limits_{[-4;4]} y = -41$, $\max\limits_{[-4;4]} y = 40$;

$\min\limits_{[0;5]} y = 8$, $\max\limits_{[0;5]} y = 40$.

b) $\max\limits_{[0;3]} y = 56$, $\min\limits_{[0;3]} y = -\frac{1}{4}$.

$\min\limits_{[2;5]} y = 6$, $\max\limits_{[2;5]} y = 552$.

c) $\min\limits_{[2;4]} y = 0$; $\max\limits_{[2;4]} y = \frac{2}{3}$.

$\min\limits_{[-3;-2]} y = \frac{5}{4}$; $\max\limits_{[-3;-2]} y = \frac{4}{3}$.

d) $\min\limits_{[-1;1]} y = 1$; $\max\limits_{[-1;1]} y = 3$.

2. Hình vuông cạnh 4 cm.

3. Hình vuông cạnh $4\sqrt{3}$ m.

4. a) $\max y = 4$, b) $\max y = 1$.

5. a) $\min y = 0$, b) $\min\limits_{(0;+\infty)} y = 4$.

§4.

1. a) Tiệm cận đứng $x = 2$;
Tiệm cận ngang $y = -1$.
b) Tiệm cận đứng $x = -1$;
Tiệm cận ngang $y = -1$.
c) Tiệm cận đứng $x = \frac{2}{5}$;
Tiệm cận ngang $y = \frac{2}{5}$.
d) Tiệm cận đứng $x = 0$.
Tiệm cận ngang $y = -1$.

2. a) Hai tiệm cận đứng $x = \pm 3$;
Tiệm cận ngang $y = 0$.
b) Tiệm cận đứng $x = -1$ và $x = \frac{3}{5}$;
Tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{5}$.
c) Tiệm cận đứng $x = -1$;
d) Tiệm cận đứng $x = 1$;
Tiệm cận ngang $y = 1$.

§5.

4. a) Một nghiệm ; b) Một nghiệm ;
c) Hai nghiệm.

5. b) Với $m < -2$ hoặc $m > 2$: có một nghiệm.
$m = -2$ hoặc $m = 2$: có hai nghiệm.
$-2 < m < 2$: có ba nghiệm.

6. b) $m = 2$.

7. a) $m = \frac{1}{4}$; c) $y = 2x - \frac{1}{4}$, $y = -2x - \frac{1}{4}$.

8. a) $m = -\frac{3}{2}$; b) $m = -\frac{5}{3}$.

9. a) $m = 0$; c) $y = -2x - 1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

5. b) i) $m \geq 2$; ii) $m < 2$;

6. b) $0 < x < 4$; c) $y = 9x + 6$.

7. b) $m < 2$ hoặc $m > 10$: một nghiệm ;
$m = 2$, $m = 10$: hai nghiệm ;
$2 < m < 10$: ba nghiệm ;
c) $y = -2x + 1$.

8. a) $m = 1$; b) $m \neq 1$; c) $m < 0$.

9. b) $y = 4x + 3$ và $y = -4x + 3$.
c) $m < -6$: vô nghiệm ;
$m = -6$: 2 nghiệm ;
$-6 < m < 3$: 4 nghiệm ;
$m = 3$: 3 nghiệm ;
$m > 3$: 2 nghiệm.

10. a) $m \leq 0$: một cực đại ; $m > 0$: hai cực đại và một cực tiểu. b) $\forall m$; c) $m > 0$.

11. c) $m = 3$.

12. a) Vô nghiệm ; b) $\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
c) $y = -\frac{17}{4}x + \frac{145}{24}$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (B) ; **2.** (A) ; **3.** (B) ; **4.** (C) ; **5.** (B).

CHƯƠNG II

§1.

1. a) 9 ; b) 8 ; c) 40 ; d) 121.

2. a) $a^{\frac{5}{6}}$; b) b ; c) a ; d) $b^{\frac{1}{6}}$.

3. a) 2^{-1} ; $1^{3,75}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.
b) 98^0 ; $32^{\frac{1}{5}}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$.

4. a) a ; b) 1 $(b \neq 1)$;
c) $\frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$ $(a \neq b)$;
d) $\sqrt[3]{ab}$.

§2.

1. a) $(-\infty\ ;\ 1)$; b) $(-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2})$;

c) $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$; d) $(-\infty\ ;\ -1) \cup (2\ ;\ +\infty)$.

2. a) $\frac{1}{3}(4x-1)(2x^2-x+1)^{-\frac{2}{3}}$;

b) $\frac{-1}{4}(2x+1)(4-x-x^2)^{-\frac{3}{4}}$;

c) $\frac{3\pi}{2}(3x+1)^{\frac{\pi}{2}-1}$;

d) $-\sqrt{3}(5-x)^{\sqrt{3}-1}$.

4. a) lớn hơn ; b) nhỏ hơn ;

c) nhỏ hơn ; d) lớn hơn.

5. a), b) nhỏ hơn ; c) lớn hơn.

§3.

1. a) -3 ; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 3.

2. a) 9 ; b) $2\sqrt{2}$; c) 16 ; d) 9.

3. a) $\frac{2}{3}$; b) $4\log_a|b|$.

4. a) lớn hơn ; b) nhỏ hơn ; c) lớn hơn.

5. a) $2a+b+1$; b) $\frac{1}{2(1-c)}$.

§4.

3. a) $\left(-\infty\ ;\ \frac{5}{2}\right)$; b) $(-\infty\ ;\ 0) \cup (2\ ;\ +\infty)$;

c) $(-\infty\ ;\ 1) \cup (3\ ;\ +\infty)$; d) $\left(-\frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

5. a) $y' = 6x - \frac{1}{x} + 4\cos x$;

b) $y' = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$;

c) $y' = \frac{1-\ln x}{x^2 \ln 3}$.

§5.

1. a) $x = \frac{2}{3}$; b) $x = -2$;

c) $x = 0$ hoặc $x = 3$; d) $x = 9$.

2. a) $x = 2$; b) $x = 3$; c) $x = 1$; d) $x = 0$.

3. a) vô nghiệm ; b) $x = 7$;

c) $x = 6$; d) $x = 5$.

4. a) $x = 2$; b) $x = 5$; c) $x = 8$.

§6.

1. a) $x < 1$ hoặc $x > 2$; b) $\frac{1}{2} \le x \le 1$;

c) $x \le 1$; d) $x < 0$ hoặc $x > 1$.

2. a) $x \le -30$; b) $\frac{5}{3} < x < 3$;

c) $x > 3$; d) $9 \le x \le 27$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

4. a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; b) $(-\infty\ ;\ 1) \cup \left(\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right)$;

c) $(-\infty\ ;\ -3) \cup (4\ ;\ +\infty)$; d) $[0\ ;\ +\infty)$.

5. 5.

6. a) 8 ; b) 11.

7. a) $x = -3$; b) $x = 0, x = 1$; c) $x = 1$;

d) $x = 8$; e) $x = 27$; g) $x = 4$.

8. a) $x \ge \frac{9}{2}$; b) $x < -1$;

c) $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |x| < \sqrt{2}$; d) $0{,}008 < x < 0{,}04$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (B) ; **2.** (C) ; **3.** (B) ; **4.** (C) ; **5.** (B) ;
6. (C) ; **7.** (B).

CHƯƠNG III

§1.

1. a) e^{-x} và $-e^{-x}$ là nguyên hàm của nhau.

b) $\sin^2 x$ là một nguyên hàm của $\sin 2x$.

c) $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$ là một nguyên hàm của $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$.

2. a) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$;

b) $\frac{2^x+\ln 2-1}{e^x(\ln 2-1)}+C$; c) $-2\cot 2x+C$;

d) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cos 8x+\cos 2x\right)+C$;

e) $\tan x-x+C$;

g) $-\frac{1}{2}e^{3-2x}+C$;

h) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{1-2x}\right|+C$.

HD. $\frac{1}{(1+x)(1-2x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right)$.

3. a) $-\frac{1}{10}(1-x)^{10}+C$; b) $\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}+C$;

c) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$; d) $-\frac{1}{1+e^x}+C$.

HD. $\frac{1}{e^x+e^{-x}+2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

4. a) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{2}+C$.

b) $e^x(x^2-1)+C$;

c) $-\frac{x}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$;

d) $(1-x)\sin x-\cos x+C$.

§2.

1. a) $\frac{3}{10\sqrt[3]{4}}(3\sqrt[3]{9}-1)$; b) 0 ; c) ln2 ;

d) $11\frac{1}{3}$; e) $\frac{4}{3}-3\ln 2$; g) 0.

2. a) 1 ; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $e+\frac{1}{2}$; d) 0.

3. a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\ln(1+e)$; d) $\frac{\pi}{6}$.

4. a) 2 ; b) $\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$;

c) 2ln2 − 1 ; d) −1.

5. a) $4\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$; c) $3\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. $\frac{1}{42}$.

§3.

1. a) $\frac{9}{2}$; b) $e+\frac{1}{e}-2$; c) 9.

2. $\frac{8}{3}$.

3. $\frac{9\pi-2}{3\pi+2}$.

4. a) $\frac{16}{15}\pi$; b) $\frac{\pi^2}{2}$; c) $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

5. a) $\frac{\pi R^3}{3}(\cos\alpha-\cos^3\alpha)$, $\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{3}\right)$;

b) $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} V(\alpha)=V_{CĐ}=\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$

tại $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

3. a) $\frac{3}{2}x^4-\frac{11}{3}x^3+3x^2-x+C$;

b) $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{32}\cos 8x+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$;

d) $\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x-x+C$.

4. a) $(x-2)\cos x-\sin x+C$;

b) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$;

c) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} + x + C$;

d) $\frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$;

e) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$; g) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right| + C$.

5. a) $\frac{8}{3}$; b) $\frac{1839}{14}$; c) $\frac{2}{27}(13e^{6} - 1)$; d) $2\sqrt{2}$.

6. a) $-\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{1}{\ln 2}$; c) $\frac{21}{2} + 11\ln 2$;

d) $-\frac{1}{2}\ln 3$; e) $1 + \frac{\pi}{2}$; g) $\frac{\pi^{3}}{3} + \frac{5\pi}{2}$.

7. a) $\frac{\pi}{2} - 1$; b) $\frac{4\pi}{3}$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (C) ; **2.** (D) ; **3.** (B) ; **4.** (C) ;

5. a) (C), b) (B) ; **6.** (D).

CHƯƠNG IV

§1.

1. a) Phần thực là 1, phần ảo là $-\pi$.

b) Phần thực là $\sqrt{2}$, phần ảo là -1.

c) Phần thực là $2\sqrt{2}$, phần ảo là 0.

d) Phần thực là 0, phần ảo là -7.

2. a) $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{3}$; b) $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$;

c) $x = 0$, $y = 1$.

3. a) Đường thẳng song song với Oy, cắt Ox tại điểm $(-2 ; 0)$.

b) Đường thẳng song song với Ox, cắt Oy tại điểm $(0 ; 3)$.

c) Các điểm nằm trong phần mặt phẳng toạ độ giới hạn bởi hai đường $x = -1$ và $x = 2$.

d) Các điểm nằm trong phần mặt phẳng toạ độ giới hạn bởi hai đường $y = 1$ và $y = 3$, kể cả các điểm nằm trên hai đường này.

e) Các điểm nằm trong hình vuông giới hạn bởi các đường $x = -2$; $x = 2$; $y = -2$; $y = 2$ kể cả các điểm nằm trên các cạnh của nó.

4. a) $|z| = \sqrt{7}$; b) $|z| = \sqrt{11}$;

c) $|z| = 5$; d) $|z| = \sqrt{3}$.

5. a) Đường tròn tâm O bán kính 1.

b) Hình tròn tâm O bán kính 1.

c) Hình vành khăn giới hạn bởi đường tròn tâm O bán kính 2 và đường tròn tâm O bán kính 1, kể cả các điểm trên đường tròn tâm O bán kính 2.

d) Là giao điểm của đường tròn tâm O bán kính 1 và đường $y = 1$.

6. a) $\overline{z} = 1 + i\sqrt{2}$; b) $\overline{z} = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$;

c) $\overline{z} = 5$; d) $\overline{z} = -7i$.

§2.

1. a) $5 - i$; b) $-3 - 10i$;

c) $-1 + 10i$; d) $-3 + i$.

2. a) $\alpha + \beta = 3 + 2i$; $\alpha - \beta = 3 - 2i$;

b) $\alpha + \beta = 1 + 4i$; $\alpha - \beta = 1 - 8i$;

c) $\alpha + \beta = -2i$; $\alpha - \beta = 12i$;

d) $\alpha + \beta = 19 - 2i$; $\alpha - \beta = 11 + 2i$.

3. a) $-13i$; b) $-10 - 4i$;

c) $20 + 15i$; d) $20 - 8i$.

4. $i^{3} = -i$, $i^{4} = 1$, $i^{5} = i$.

Nếu $n = 4q + r, 0 \le r < 4$ thì $i^{n} = i^{r}$.

5. a) $-5 + 12i$; b) $-46 + 9i$.

§3.

1. a) $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$; b) $\frac{2+\sqrt{6}}{7} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{7}i$;

c) $-\frac{15}{13} + \frac{10}{13}i$; d) $-2 - 5i$.

2. a) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$; b) $\frac{\sqrt{2}}{11} + \frac{3}{11}i$;

c) $-i$; d) $\frac{5}{28}-\frac{\sqrt{3}}{28}i$.

3. a) $-28+4i$; b) $\frac{-32}{5}-\frac{16}{5}i$;

c) $32+13i$; d) $\frac{219}{45}-\frac{153}{45}i$.

4. a) $z = 1$; b) $z=\frac{8}{5}-\frac{9}{5}i$; c) $z=15-5i$.

§4.

1. $\pm i\sqrt{7}$; $\pm 2i\sqrt{2}$; $\pm 2i\sqrt{3}$; $\pm 2i\sqrt{5}$; $\pm 11i$.

2. a) $z_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$; b) $z_{1,2}=\frac{-3\pm i\sqrt{47}}{14}$

c) $z_{1,2}=\frac{7\pm i\sqrt{171}}{10}$.

3. a) $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; $z_{3,4}=\pm i\sqrt{3}$.

b) $z_{1,2}=\pm i\sqrt{2}$; $z_{3,4}=\pm i\sqrt{5}$.

4. $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$; $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

5. $x^2-2ax+a^2+b^2=0$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

2. Nếu số phức là một số thực thì môđun của nó chính là giá trị tuyệt đối của nó.

3. $z=\overline{z}$ khi và chỉ khi $z\in\mathbb{R}$.

4. a) Số phức có phần thực lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Số phức có phần ảo thuộc đoạn [-1 ; 2].

c) Số phức có phần thực thuộc đoạn [-1 ; 1] và môđun không vượt quá 2.

5. a) Đường $x = 1$. b) Đường $y = -2$.

c) Hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = -1$; $x = 2$; $y = 0$; $y = 1$.

d) Hình tròn tâm O bán kính 2.

6. a) $x = 1$; $y = 1$; b) $x = -1$; $y = 3$.

8. a) $21 + i$; b) $\frac{23}{5}-\frac{14}{5}i$;

c) $4i$; d) $\frac{-4}{5}+\frac{1}{5}i$.

9. a) $z=\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i$; b) $z=\frac{18}{17}-\frac{13}{17}i$.

10. a) $z_{1,2}=\frac{-7\pm i\sqrt{47}}{6}$; b) $z_{1,2}=\pm\sqrt[4]{8}$;

$z_{3,4}=\pm i\sqrt[4]{8}$. c) $z_{1,2}=\pm 1$, $z_{3,4}=\pm i$.

11. $z_1=\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$, $z_2=\frac{3-i\sqrt{7}}{2}$.

12. Đặt $z_1+z_2=a$; $z_1z_2=b$; $a,b\in\mathbb{R}$.

z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-az+b=0$.

Bài tập trắc nghiệm

1. (B). **2.** (C). **3.** (B). **4.** (C). **5.** (B). **6.** (C).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) $x_1=1$; $x_2=1+\frac{2}{a}$.

b) $S=2+\frac{2}{a}$; $P=1+\frac{2}{a}$.

2. b) $\frac{26}{3}$.

3. a) $a = 1$, $b = -1$; c) $\frac{134\pi}{105}$.

4. a) $v(2) = -5$, $a(2) = 1$; b) $t = 3$.

5. a) $a = -2$, $b=\frac{5}{2}$;

c) $y=1$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}$.

6. b) $y=\frac{3}{(a+1)^2}(x-a)+\frac{a-2}{a+1}$.

7. b) $y=\frac{1}{2}x+1$ và $y=2x$. c) $V=2\pi$.

8. a) $\min\limits_{\left[-2;\frac{5}{2}\right]} f(x)=-19$, $\max\limits_{\left[-2;\frac{5}{2}\right]} f(x)=8$.

b) $\min\limits_{[1;e]} f(x) = 0,\ \max\limits_{[1;e]} f(x) = e^2.$

c) $\min\limits_{[0;\infty]} f(x) = 0,\ \max\limits_{[0;+\infty)} f(x) = \frac{1}{e}.$

d) $\min\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = -2,$

$\max\limits_{\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

9. a) $x = 0$; b) $x_1 = 0,\ x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 3$;

c) $x_1 = 3, x_2 = 5$; d) $x_1 = 4, x_2 = 8$.

10. a) $(-\infty\ ;\ 0) \cup [1\ ;\ +\infty)$;

b) $(-\sqrt{2}\ ;\ -1) \cup (1\ ;\ \sqrt{2})$;

c) $\left(0\ ;\ \frac{1}{10000}\right) \cup [10\ ;\ +\infty)$;

d) $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right) \cup [2\ ;\ +\infty)$.

11. a) $\frac{4}{9}(5e^6 + 1)$; b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \ln 2$;

c) π ; d) $3e - 5$.

12. a) $\frac{1}{8}\ln 3$; b) $\frac{\pi}{180}$; c) $\frac{2}{35}$; d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

13. a) 6 ; b) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

14. $\frac{256\pi}{35}$.

15. a) $z = \frac{22}{13} - \frac{6}{13}i$; b) $z = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$;

c) $z_1 = 1 + 2\sqrt{3}i,\ z_2 = 1 - 2\sqrt{3}i$;

d) $z_{1,2} = \pm\sqrt{3},\ z_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$.

16. a) Hình tròn tâm tại gốc toạ độ, bán kính 2, không kể biên.

b) Hình tròn tâm tại (0 ; 1), bán kính 1.

c) Hình tròn tâm tại (1 ; 1), bán kính 1 (không kể biên).

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**
Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**
Chịu trách nhiệm nội dung : Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Biên tập lần đầu : **PHẠM BẢO KHUÊ – LÊ THỊ THANH HẰNG**
Biên tập tái bản : **HOÀNG VIỆT**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Biên tập mĩ thuật : **BÙI QUANG TUẤN**
Biên tập kĩ thuật : **NGUYỄN THỊ THANH HẢI – TRẦN THANH HẰNG**
Sửa bản in : **ĐẶNG VĂN TUYẾN**
Chế bản : **CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

GIẢI TÍCH 12

Mã số : CH201T0

In............... cuốn (QĐ in số : ....), khổ 17 × 24 cm.
Đơn vị in : .... địa chỉ ....
Cơ sở in : .... địa chỉ ....
Số ĐKXB : 01 - 2020/CXBIPH/616 - 869/GD
Số QĐXB : ... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm ...
Mã số ISBN : 978-604-0-18895-3